SULLA TEORIA MATEMATICA DELLA PROPAGAZIONE...

Galileo Ferraris

SULLA TEORIA MATEMATICA
DELLA PROPAGAZIONE DELL'ELETTRICITÀ
NEI SOLIDI OMOGENEI

DISSERTAZIONE

PRESENTATA

DA

GALILEO FERRARIS

INGEGNERE

ASSISTENTE ALLA CATTEDRA DI FISICA INDUSTRIALE PRESSO IL R. MUSEO INDUSTRIALE ITALIANO

PEL CONCORSO

AD UN POSTO DI DOTTORE AGGREGATO

ALLA FACOLTÀ DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

NELLA REGIA UNIVERSITÀ DI TORINO

IL 22 FEBBRAIO 1872

TORINO

STAMPERIA REALE

PREFAZIONE

Le analisi di Thomson, di Kirchhoff, di Weber e di Helmholtz sulle correnti elettriche hanno posto in luce due fatti, dei quali le idee moderne sulla correlazione delle forze fisiche accrescono l'importanza: l'analogia delle leggi della propagazione dell'elettricità nei fili di resistenza infinitamente piccola con quelle della propagazione del suono nei tubi e nelle verghe vibranti longitudinalmente, e l'analogia della propagazione dell'elettricità nei fili di resistenza infinitamente grande con quella del calore nei corpi solidi.

Collo scopo principalmente di vedere fino a qual punto sussistano queste analogie, e fino a qual punto esse possano concorrere coi risultati di altre teorie ad indicarci la via per iscoprire la vera natura dei fenomeni elettrici, io mi propongo di studiare la propagazione degli stati elettrici nel caso semplice di un conduttore filiforme immerso in un mezzo perfettamente isolante e senza derivazioni, e di applicare con metodo uniforme le leggi così trovate a casi tali e così ordinati, che valgano a mostrarmi come quelle leggi si trasformino gradatamente, mentre, variando la natura del conduttore, la resistenza del circuito cresce da zero fino all'infinito.

Le sole ipotesi, che la legge di Ohm valga per le correnti variabili come per le costanti, e che sia esatta la formola fondamentale dell'induzione voltaica data da Weber, bastano a stabilire le equazioni generali del movimento dell'elettricità date pella prima volta dal Kirchhoff. Sono cinque equazioni differenziali fra cinque funzioni di quattro variabili indipendenti; le cinque funzioni sono la quantità di elettricità, riferita all'unità di volume, contenuta nell'interno del conduttore, la quantità di elettricità, riferita all'unità di superficie, accumulata alla superficie del corpo, e le tre componenti dell'intensità della corrente parallelamente ai tre assi coordinati; le quattro variabili indipendenti sono il tempo e le tre coordinate. Queste equazioni si semplificano e si riducono a due nel caso di un conduttore lineare, cioè avente la forma di un filo di sezione infinitamente piccola; ed in queste equazioni non figurano più che due funzioni di due variabili indipendenti: la quantità di elettricità contenuta nel filo riferita all'unità di lunghezza e l'intensità della corrente, funzioni entrambe del tempo e dell'arco di conduttore compreso fra un'origine data ed il punto che si considera.

Espressi con serie trigonometriche gli integrali delle equazioni così ridotte, io considero successivamente i casi di una resistenza infinitamente piccola, di una resistenza finita e di una resistenza grande oltre ogni limite.

Nel primo caso l'analogia fra i due fenomeni: la propagazione dell'elettricità nei fili e quella del suono nei tubi e nelle verghe vibranti longitudinalmente è completa. Alla condensazione del corpo vibrante corrisponde la carica elettrica del conduttore, alla velocità della vibrazione l'intensità della corrente. Come la condensazione e la velocità, così la carica elettrica e l'intensità della corrente, si trasmettono sotto forma di due onde uguali propagantisi in versi opposti con velocità uniforme; questa velocità è quella della luce.

Nei piccoli tubi il suono si propaga meno rapidamente, che nello spazio illimitato, e la velocità di propagazione è tanto minore, quanto è minore il diametro del tubo, e quanto più lunga è l'onda. Nella propagazione dell'elettricità avviene lo stesso. Se invece di supporre la resistenza infinitamente piccola, le si attribuisce un valore finito, purchè inferiore ad un certo limite, la carica elettrica e l'intensità della corrente sono rappresentate ancora ciascuna da una serie, ad ogni termine della quale corrisponde un'onda semplice; ma tutte queste onde si propagano lungo il filo con velocità diverse e tanto maggiori quanto è maggiore il numero d'ordine del termine corrispondente, quanto più l'onda è corta. Diminuendo la resistenza, tutte queste velocità convergono verso quella della luce, come aumentando il diametro del tubo, in cui si propaga un suono, tutte le velocità delle onde semplici, di cui questo è composto, convergono assintoticamente verso quella del suono in un mezzo illimitato.

Aumentando ancora la resistenza, la velocità delle onde più lunghe si riduce a zero e poi diventa immaginaria. Il primo termine delle serie, e dopo il primo successivamente tutti gli altri cessano di rappresentare un'onda; le serie si scompongono così in due parti; la seconda parte rappresenta ancora un moto propagantesi per onde analoghe a quelle sonore; la prima parte invece rappresenta una funzione, che non trova finora riscontro in nessuna di quelle, che esprimono leggi fisiche di altri ordini.

Col crescere della resistenza tutti i termini delle serie passano successivamente dalla seconda alla prima parte. Al limite, quando la resistenza diventi infinita, la quantità di elettricità, che si trasmetterà per onde, sarà infinitamente piccola. Ma intanto i termini delle serie si saranno trasformati per modo, che la funzione rappresentante la carica elettrica soddisferà a quella stessa equazione alle derivate parziali, dalla quale dipendono le leggi della propagazione del calore nei corpi solidi.

Questi fatti, posti a confronto coi dati di altre teorie, fanno intravedere, come quel medesimo etere, a cui si attribuisce la propagazione della luce e del calore raggiante, intervenga nei fenomeni elettrici, e come l'esistenza di questo veicolo universale delle energie fisiche possa trovare una dimostrazione di più in due leggi affatto sperimentali: la legge di Ohm e quella dei fenomeni d'induzione.

INDICE

I.

Definizioni ed ipotesi fondamentali.

II.

Equazioni generali.

III.

Sull'elettricità contenuta nell'interno del conduttore.

IV.

Applicazione ai conduttori lineari — Azione di un elemento cilindrico sopra un punto della sua sezione media.

V.

Riduzione delle equazioni generali nel caso di un conduttore lineare.

VI.

Integrazione.

VII.

1.° Caso. $\frac{3\,2\,\gamma}{c r \sqrt{2}}$ *è infinitamente grande.*

VIII.

Applicazione ad un conduttore formante da sè un circuito chiuso.

IX.

Applicazione ad un conduttore, i cui due capi sono separati.

XV.

Conclusione.

I.

Definizioni ed ipotesi fondamentali.

1. Gli stati elettrici dei corpi si rivelano mediante attrazioni e ripulsioni esercitate sui corpi vicini. Queste forze, che seguono la legge di Coulomb, determinano il *segno* degli stati elettrici e dànno la misura delle *quantità di elettricità*. Un corpo elettrizzato è in istato elettrico positivo o negativo, secondochè un vetro stato strofinato con una stoffa di lana lo respinge o lo attrae, e noi diciamo che in quel corpo vi è un'unità di energia elettrica od una quantità di elettricità uguale ad uno, quando questa quantità di elettricità, se fosse riunita in un unico punto, eserciterebbe alla distanza di un millimetro sopra un punto materiale, su cui fosse concentrata una quantità di elettricità uguale ad essa, una ripulsione capace di imprimere alla massa di un milligrammo l'accelerazione di un millimetro.

2. La trasmissione degli stati elettrici fra le parti di un corpo costituisce una *corrente elettrica*. È indifferente considerare la corrente come la propagazione di un solo de' due stati elettrici opposti, o come la propagazione simultanea de' due stati in versi contrarii. Adottando questa seconda maniera di

2

enunciare il fenomeno, noi diciamo *verso* della corrente il verso in cui si trasmette l'elettricità positiva.

Supponiamo dapprima, che in ogni punto di un corpo la trasmissione si faccia parallelamente ad una data direzione. Se la corrente è costante, tutte le sezioni del corpo perpendicolari a quella direzione sono attraversate in un dato intervallo di tempo da una medesima quantità di elettricità positiva in un senso, e dalla medesima quantità di elettricità negativa nel senso contrario. Noi diciamo *intensità* della corrente la quantità di elettricità positiva trasmessa attraverso ad ogni sezione in un minuto secondo.

Se la corrente varia col tempo, sia q la quantità di elettricità positiva che ha attraversato una data sezione dopo il tempo t; la derivata $\frac{dq}{dt}$ rappresenta la quantità di elettricità positiva che passerebbe per quella sezione nell'unità di tempo, se alla fine di t la trasmissione diventasse costante. È il valore di questa derivata che noi denominiamo intensità della corrente nella sezione data e nell'istante considerato.

Ed analogamente, qualunque sia la forma di un corpo e comunque vi avvengano trasmissioni di stati elettrici, se in questo corpo consideriamo un punto e se la quantità di elettricità positiva, che nell'elemento di tempo dt successivo all'istante t attraversa normalmente un elemento superficiale di area ω comunque collocato in quel punto, è $i\omega dt$, la quantità $i\omega$ dicesi intensità della corrente elementare nel punto e nell'istante dati e nella direzione della normale all'elemento piano. La quantità finita i si può denominare *intensità unitaria* o riferita all'unità di superficie in quel punto, in quell'istante ed in quella direzione.

3. Se stando la stessa la causa, che in un dato istante tende a produrre il movimento dell'elettricità, stando le stesse la forma, le dimensioni, la posizione del corpo, in cui questo

si deve manifestare, stando le stesse tutte le altre circostanze, si suppone, che varii la materia, di cui il corpo è formato, si ammette, che l'intensità unitaria della corrente in ciascun punto varii proporzionalmente ad una costante dipendente solo dalla natura del corpo; e questa costante dicesi *coefficiente di conducibilità*.

Quest'ipotesi non è altro che un'estensione della legge di Ohm; per correnti costanti essa è provata vera da tutte le esperienze; e per correnti variabili essa è giustificata dal fatto sperimentale, che nei fenomeni d'induzione, ove la causa della corrente comincia ad apparire, cresce e torna a zero, la quantità totale di elettricità messa in movimento nel circuito indotto è proporzionale al coefficiente di conducibilità.

Il valore del rapporto $\frac{i}{k}$ dell'intensità unitaria i della corrente in un dato punto del corpo ed in una data direzione, al coefficiente di conducibilità k del corpo, non dipende, in grazia del principio precedente, che dalla causa del movimento elettrico e dicesi la *forza elettromotrice* agente in quel punto ed in quella direzione.

Si sa che per un corpo, sul quale non agiscano fenomeni d'induzione nè azioni elettrostatiche dovute a cause esterne, è possibile una sola distribuzione dell'elettricità esistente su di esso, pella quale vi sia equilibrio elettrico, e che questa distribuzione è quella, per cui il potenziale di tutta quell'elettricità ha un medesimo valore in tutti i punti dell'interno e della superficie del corpo. Se il potenziale non è costante v'è corrente, ed estendendo a tutti i casi ciò, che la distribuzione dell'elettricità libera lungo il circuito data da Ohm e provata sperimentalmente da Kohlrausch dimostra pel caso speciale di una corrente costante percorrente un conduttore filiforme, si ammette che, detto Ω il potenziale e ds uno spazio infinitamente piccolo percorso nella direzione s, l'intensità unitaria della

corrente in un punto dato, e nella direzione s sia proporzionale al coefficiente differenziale $\frac{d\Omega}{ds}$.

Essendo così tra loro proporzionali la forza elettromotrice e la derivata del potenziale, esse si possono ridurre ad una medesima unità di misura; e siccome $-\frac{d\Omega}{ds}$ esprime l'attrazione elettrostatica che l'elettricità distribuita sul conduttore eserciterebbe sul punto considerato, se su questo punto fosse riunita una quantità di elettricità uguale ad uno, così noi possiamo assumere come unità di forza elettromotrice quella forza elettromotrice, che equivale ad un'attrazione elettrostatica uguale ad un mezzo (*), capace cioè di imprimere in due minuti secondi alla massa di un milligrammo la velocità di un millimetro.

Scelta l'unità di intensità, scelta l'unità di forza elettromotrice, ne risulta l'unità per le conducibilità. È uguale ad uno la conducibilità di quel corpo, in cui una forza elettromotrice uguale ad uno produce una corrente di intensità unitaria uguale all'unità.

4. Le unità che abbiamo scelto sono quelle conosciute col nome di *unità meccaniche*, e si passa da queste alle elettromagnetiche mediante il dato della fisica sperimentale, che le unità elettromagnetiche di intensità, di forza elettromotrice, di

---

(*) Diciamo uguale ad un mezzo e non uguale ad uno per servirci di un'unità già in uso. Quest'unità diffatti è stata proposta e determinata da Weber. Ora Weber immaginava la corrente come costituita dallo scolo in sensi contrarii di due fluidi, e definiva la forza elettromotrice: la forza tendente a separare un'unità di fluido positivo dalla quantità uguale di fluido negativo, che con esso costituisce del fluido neutro. Ora la forza agente sul fluido negativo è sempre uguale e contraria a quella agente sul positivo, epperò la forza elettromotrice, secondo la definizione di Weber, è doppia dell'attrazione elettrostatica rappresentata dalla derivata del potenziale.

conducibilità valgono rispettivamente $\frac{c}{2\sqrt{2}}$, $\frac{4}{c\sqrt{2}}$, $\frac{c^2}{8}$ unità meccaniche, essendo c una velocità, per cui le esperienze di Kohlrausch e Weber diedero il valore

$$c = 439450 \,.\, 10^6 \frac{\text{millimetro}}{\text{secondo}} \ (*) \,.$$

II.

Equazioni generali.

3. Se si dicono: x, y, z le coordinate rettangolari di un punto del conduttore; X, Y, Z i valori che hanno in quel punto, nell'istante considerato, le componenti della forza elettromotrice prese parallelamente agli assi coordinati; $u.dydz.dt$, $v.dzdx.dt$, $w.dxdy.dt$ le quantità di elettricità positiva, che si trasmettono nell'elemento di tempo dt successivo all'istante che si considera, nelle direzioni dei tre assi, attraverso gli elementi superficiali $dydz$, $dzdx$, $dxdy$; k il coefficiente di conducibilità del corpo; si ha per l'ipotesi fondamentale

$$(1)\ldots \qquad u = kX\,, \quad v = kY\,, \quad w = kZ\,.$$

La forza elettromotrice, di cui X, Y, Z sono le componenti, è dovuta in parte all'azione dell'elettricità libera distribuita sul conduttore, in parte all'induzione, che ha luogo per il variare delle correnti in tutti gli altri punti del circuito, in parte finalmente a cause esterne.

(*) La notazione $\frac{\text{millimetro}}{\text{secondo}}$ è usata dal Weber per ricordare, che si è assunto per unità di lunghezza il millimetro, e per unità di tempo il minuto secondo.

Se si rappresenta con Ω il valore nel punto (x, y, z) del potenziale dell'elettricità libera distribuita sul conduttore, le componenti della prima parte della forza elettromotrice sono

$$(2)\ldots \qquad -2\frac{d\Omega}{dx}\ , \qquad -2\frac{d\Omega}{dy}\ , \qquad -2\frac{d\Omega}{dz}\ .$$

6. Per trovare le componenti della seconda parte della forza elettromotrice rappresentiamo con x', y', z' le coordinate di un secondo punto del conduttore, con u', v', w' i valori di u, v, w per questo punto, e con r la distanza tra i due punti (x, y, z) ed (x', y', z').

Si sa dalla teoria dell'induzione voltaica, che se in un elemento ds' di un conduttore l'intensità i' della corrente nell'elemento di tempo dt cresce di di', si sviluppa in un secondo elemento ds appartenente allo stesso, o ad un altro conduttore, e distante di r da ds' una forza elettromotrice, che in unità meccaniche è espressa dalla formola

$$(3)\ldots \qquad -\frac{8}{c^2}\frac{di'}{dt}\frac{ds'}{r}\cos(r, ds)\cos(r, ds')\ ,$$

nella quale c rappresenta la velocità,

$$c = 439450 \,.\, 10^6 \frac{\text{millimetro}}{\text{secondo}}.$$

Ora nell'elemento $dx'\,dy'\,dz'$ si hanno nell'istante considerato, nelle direzioni degli assi coordinati, delle correnti di intensità

$$u'dy'dz'\ , \qquad v'dz'dx'\ , \qquad w'dx'dy'\ ,$$

che nell'intervallo di tempo dt aumentano di

$$\frac{du'}{dt}dt \,.\, dy'dz'\ , \quad \frac{dv'}{dt}dt \,.\, dz'dx'\ , \quad \frac{dw'}{dt}dt \,.\, dx'dy'\ .$$

Questi elementi di corrente, aventi le lunghezze dx', dy', dz', fanno colla retta r, che unisce l'elemento $dx'dy'dz'$ al punto (x,y,z) gli angoli, i cui coseni hanno i valori

$$\frac{x-x'}{r}\,, \qquad \frac{y-y'}{r}\,, \qquad \frac{z-z'}{r}\,,$$

che bisogna sostituire a $\cos(r,ds')$ nell'espressione (3) per avere le forze elettromotrici elementari sviluppate da ciascuno di essi nel punto (x,y,z) e nella direzione determinata dal valore che si dà a $\cos(r,ds)$. Facendo $\cos(r,ds)=\frac{x-x'}{r}$, si hanno così le forze elettromotrici sviluppate per induzione da quegli elementi di corrente nel punto (x,y,z) e nella direzione dell'asse delle x, le quali forze elettromotrici, sommate, dànno la prima delle espressioni

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left(\frac{du'}{dt}(x-x')+\frac{dv'}{dt}(y-y')+\frac{dw'}{dt}(z-z')\right),$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(y-y')\left(\frac{du'}{dt}(x-x')+\frac{dv'}{dt}(y-y')+\frac{dw'}{dt}(z-z')\right),$$

$$-\frac{8}{c^2}\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(z-z')\left(\frac{du'}{dt}(x-x')+\frac{dv'}{dt}(y-y')+\frac{dw'}{dt}(z-z')\right).$$

Le altre due dànno la totale forza elettromotrice sviluppata per induzione dall'elemento $dx'dy'dz'$ sul punto (x,y,z) rispettivamente nella direzione dell'asse delle y e nella direzione dell'asse delle z, e si ottengono come la prima sostituendo a $\cos(r,ds)$ successivamente

$$\frac{y-y'}{r} \quad \text{e} \quad \frac{z-z'}{r}\,.$$

Perciò se si pone

$$(4)\begin{cases} U=\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\Big(u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big), \\ V=\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(y-y')\Big(u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big), \\ W=\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(z-z')\Big(u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big), \end{cases}$$

e se si intendono le integrazioni estese a tutto il volume del conduttore, si hanno le tre componenti della seconda parte della forza elettromotrice agente nel punto (x, y, z) espresse da

$$(5)\ldots \qquad -\frac{8}{c^2}\frac{dU}{dt}\,, \qquad -\frac{8}{c^2}\frac{dV}{dt}\,, \qquad -\frac{8}{c^2}\frac{dW}{dt}\,.$$

7. Dico finalmente F la forza elettromotrice sviluppata nel punto (x, y, z) da cause esterne al conduttore, ed F_x, F_y, F_z le sue componenti parallele agli assi coordinati, ed ho nelle somme di queste colle (2) e colle (5) i valori delle componenti X, Y, Z della totale forza elettromotrice agente sul punto (x, y, z), cioè:

$$(6)\ldots \qquad \begin{cases} X=-2\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{dU}{dt}\right)+F_x\,, \\ Y=-2\left(\frac{d\Omega}{dy}+\frac{4}{c^2}\frac{dV}{dt}\right)+F_y\,, \\ Z=-2\left(\frac{d\Omega}{dz}+\frac{4}{c^2}\frac{dW}{dt}\right)+F_z\,; \end{cases}$$

onde sostituendo in (1):

$$(7)\ldots \qquad \begin{cases} u=-2k\left(\frac{d\Omega}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{dU}{dt}\right)+kF_x\,, \\ v=-2k\left(\frac{d\Omega}{dy}+\frac{4}{c^2}\frac{dV}{dt}\right)+kF_y\,, \\ w=-2k\left(\frac{d\Omega}{dz}+\frac{4}{c^2}\frac{dW}{dt}\right)+kF_z\,. \end{cases}$$

8. Trattandosi qui di un conduttore in cui non v'ha equilibrio elettrico, non si può ammettere in generale che tutta l'elettricità libera sia accumulata sulla superficie di esso, e nel valore di Ω deve figurare anche l'elettricità distribuita nell'interno del corpo. Designando perciò con $\varepsilon'.dx'dy'dz'$ la quantità di elettricità libera contenuta nell'elemento di volume $dx'dy'dz'$, e con $e'.d^2S'$ la quantità di elettricità accumulata sull'elemento d^2S' della superficie del corpo, si deve porre per Ω l'espressione

$$(8)\ldots \qquad \Omega=\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\varepsilon'+\iint\frac{d^2S'}{r}e' \ .$$

9. ε ed e sono in generale funzioni di x,y,z e di t, ed è facile trovare due equazioni tra le loro derivate parziali prese rispetto a t e le funzioni u,v,w delle medesime variabili.

Le differenze fra le quantità di elettricità positiva, che nel tempuscolo dt escono e quelle che entrano nell'elemento $dxdydz$ rispettivamente nelle direzioni degli assi delle x, delle y e delle z, sono

$$dxdydz\frac{du}{dx}dt\ , \qquad dxdydz\frac{dv}{dy}dt\ , \qquad dxdydz\frac{dw}{dz}dt\ .$$

La somma di queste differenze dà la diminuzione della quantità di elettricità libera $\varepsilon dxdydz$ contenuta nell'elemento, la quale avviene nel tempo dt in grazia del movimento dell'elettricità positiva. Il movimento opposto dell'elettricità negativa dà un ugual aumento di elettricità negativa, cioè un' egual diminuzione di elettricità positiva; epperò quella somma è la metà della diminuzione totale dell'elettricità libera. Questa diminuzione essendo anche espressa da $-dxdydz\frac{d\varepsilon}{dt}dt$, si ha così

$$(9)\ldots \qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}\ .$$

Analogamente se si denotano con (N,x), (N,y), (N,z) gli angoli, che la normale all'elemento di superficie d^2S, diretta verso l'interno, fa cogli assi delle x, delle y e delle z, la quantità di elettricità positiva, che durante dt passa dalla superficie all'interno del conduttore, è espressa da

$$\left(u\cos.(N,x)+v\cos.(N,y)+w\cos.(N,z)\right)d^2S dt \ ,$$

e quindi si ha

$$(10)\ldots \quad u\cos.(N,x)+v\cos.(N,y)+w\cos.(N,z)=-\frac{1}{2}\frac{de}{dt} \ .$$

Servendoci di un'espressione usata nell'idraulica, possiamo denominare le equazioni (9) e (10): *equazioni di continuità.*

III.

Sull'elettricità contenuta nell'interno del conduttore.

10. Dalle equazioni precedenti si può dedurre una rimarchevole relazione tra ε ed Ω. Si supponga $F=0$ e si sostituiscano in (9) ad u, v, w i valori dati, in questa ipotesi, dalle (7); ricordando che

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2}+\frac{d^2\Omega}{dy^2}+\frac{d^2\Omega}{dz^2}=-4\pi\varepsilon \ ,$$

si otterrà così

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-16k\left[\pi\varepsilon-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right)\right] \ .$$

Ora poichè l'espressione (4) di U si può scrivere

$$U=-\iiint dx'\,dy'\,dz'\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\right],$$

è

$$\frac{dU}{dx} = -\iiint dx'\,dy'\,dz'\,\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\,u'$$

$$-\iiint dx'\,dy'\,dz'\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}\Big[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\Big].$$

Si trasformino in modo analogo le espressioni di V e di W, se ne ricavino i valori di $\frac{dV}{dy}$ e di $\frac{dW}{dz}$, si sommino i risultati coll'espressione di $\frac{dU}{dx}$ ora trovata, e si otterrà per tal modo:

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}$$

$$=-\iiint dx'\,dy'\,dz'\left(u'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+v'\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+w'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)\;,$$

poichè è

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}=0$$

per tutti i punti (x', y', z') situati ad una distanza finita da (x, y, z), ed è inoltre facile convincersi, che gli integrali, che formano il secondo termine dei valori di $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dW}{dz}$, estesi ad uno spazio infinitesimo, nel quale si trovi il punto (x, y, z), hanno valori infinitamente piccoli.

Sostituiamo nell'integrale, che costituisce il secondo membro dell'ultima equazione trovata, alle derivate parziali di $\frac{1}{r}$ rispetto ad x, y, z quelle rispetto ad x', y', z' prese negativamente,

scomponiamo quell'integrale in tre, e facciamo l'integrazione per parti pel primo rispetto ad x', pel secondo rispetto ad y' e pel terzo rispetto a z'. Dicendo x_1', x'_2, x_3' ... i valori di x per i punti in cui la retta parallela all'asse delle x, condotta pel punto (y', z') del piano delle y, z, incontra la superficie del conduttore, ed u_1', u_2', ..., r_1, r_2 ... i valori corrispondenti di u' e di r, l'integrazione rispetto ad x' dà

$$dy'dz'\left(-\frac{u_1'}{r_1}+\frac{u_2'}{r_2}-\frac{u_3'}{r_3}+\frac{u_4'}{r_4}-\ldots\right)-\int\frac{dx'dy'dz'}{r}\frac{du'}{dx'} ,$$

ossia dicendo d^2S_i' l'elemento della superficie del corpo a cui appartiene il punto (x_i', y', z') e che si proietta in $dy'dz'$, ed (N_i', x) l'angolo che la normale a quest'elemento, diretta verso l'interno del corpo, fa coll'asse delle x:

$$-\Sigma\, d^2S_i'\frac{u_i'}{r_i}\cos.(N_i', x)-\int\frac{dx'dy'dz'}{r}\frac{du'}{dx'} .$$

Le integrazioni rispetto ad y' e a z' dànno risultati analoghi, onde si trova

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}$$
$$=-\iint\frac{d^2S'}{r}\Big[u'\cos.(N', x)+v'\cos.(N', y)+w'\cos.(N', z)\Big]$$
$$-\iiint\frac{dx'dy'dz'}{r}\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right) ;$$

dove N' rappresenta la parte interna della normale all'elemento d^2S' della superficie del conduttore. Ma, avuto riguardo alle relazioni (10), (9) ed (8), quest'equazione si può scrivere

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}=\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{dt} ,$$

dunque sostituendo nel valore di $\frac{d\varepsilon}{dt}$:

$$(11)\ldots \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -8k\left(2\pi\varepsilon - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\Omega}{dt^2}\right).$$

Se la corrente è costante, ε ed Ω sono indipendenti dal tempo, e perchè la (11) sia soddisfatta dev'essere $\varepsilon = 0$. Quest'equazione insegna adunque, che *quando in un conduttore la trasmissione degli stati elettrici è permanente, tutti i punti di questo conduttore, eccettuati quelli alla superficie, sono allo stato neutro.*

Ma la stessa equazione ci dice, che questo teorema, il quale comprende come caso particolare quello notissimo dell'elettrostatica, pel quale in un conduttore in equilibrio elettrico tutta l'elettricità libera si accumula alla superficie, non vale che pelle correnti costanti. Finchè la trasmissione dell'elettricità non è arrivata allo stato di reggime, ε non può essere nullo che eccezionalmente, ed anche l'interno del corpo è perciò in generale elettrizzato (*).

(*) Ohm ammetteva, guidato dall'analogia tra la propagazione del calore e quella dell'elettricità, che in tutti i punti di una sezione trasversale di un conduttore filiforme percorso da una corrente costante vi fosse una stessa tensione elettrostatica. Che quest'ipotesi fosse inammissibile poteva dimostrarlo la semplice considerazione, che secondo essa un conduttore di cui tutti i punti fossero egualmente elettrizzati, dovrebbe poter essere in equilibrio elettrico; il che è contrario alla osservazione.

IV.

Applicazione ai conduttori lineari. - Azione di un elemento cilindrico sopra un punto della sua sezione media.

11. I conduttori ordinariamente impiegati hanno una forma allungata ed una sezione trasversale piccolissima a fronte della lunghezza. Noi non possiamo applicare le equazioni generali trovate se non al caso teorico di un conduttore di sezione uniforme ed infinitamente piccola. Conviene in questo caso dividere il calcolo della forza elettromotrice agente sul punto, che si vuol considerare, in due parti, studiando dapprima quella parte della forza elettromotrice, che emana da una porzione estremamente breve di filo, la quale si possa considerare come cilindrica, e nella cui sezione media è situato il punto considerato, e valutando poi la forza elettromotrice dovuta all'elettricità libera ed all'induzione di tutte le altre parti del circuito situate da quello a distanza misurabile.

L'elemento di conduttore, nel quale si trova il punto, di cui ci occupiamo, sia un cilindro a sezion retta circolare di raggio infinitamente piccolo rispetto alla lunghezza, ed ammettiamo, che la distribuzione sì della elettricità libera come delle correnti sia in questo elemento simmetrica attorno all'asse. Prendiamo l'asse del cilindro per asse delle x, ed invece di y e z introduciamo le coordinate polari ρ e φ, cosicchè sia

$$y = \rho \cos.\varphi\ , \qquad z = \rho\,\text{sen.}\varphi\ ;$$
$$y' = \rho' \cos.\varphi'\ , \qquad z' = \rho'\,\text{sen.}\varphi'\ .$$

Rappresentiamo inoltre l'intensità unitaria della corrente nella direzione normale all'asse con σ pel punto $(x,\ \rho,\ \varphi)$ e con σ' pel punto $(x',\ \rho',\ \varphi')$, e consideriamola come positiva quando la corrente va dall'asse alla superficie. Abbiamo così

$$v = \sigma \cos.\varphi \ , \qquad v' = \sigma' \cos.\varphi' \ ,$$
$$w = \sigma \operatorname{sen.}\varphi \ , \qquad w' = \sigma' \operatorname{sen.}\varphi' \ ,$$

e, detti Ω_1 ed U_1 i valori delle parti di Ω e di U dovute al cilindretto elementare,

$$(8')\ldots \quad \Omega_1 = \iiint \frac{dx'\rho' d\rho' d\varphi'}{r}\varepsilon' + \alpha \iint \frac{dx' d\varphi'}{r} e' \ ,$$

$$(4') \quad U_1 = \iiint \frac{dx'\rho' d\rho' d\varphi'}{r^3}(x-x')\Big[u'(x-x') + \sigma'\big(\rho \cos.(\varphi-\varphi') - \rho'\big)\Big].$$

Siccome σ non è funzione che di x e di ρ, la (9) si può trasformare nella

$$(9')\ldots \qquad \frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{d.\rho\sigma}{d\rho} = -\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt} \ ,$$

e poichè nel nostro caso

$$(N,x) = \frac{\pi}{2} \ , \qquad (N,y) = \varphi + \pi \ , \qquad (N,z) = \varphi + \frac{\pi}{2} \ ,$$

la (10) si riduce alla

$$(10')\ldots \qquad \sigma = \frac{1}{2}\frac{de}{dt} \ .$$

12. Ciò premesso, facciamo per brevità

$$x' - x = \xi \ , \quad \text{talchè} \quad dx' = d\xi \ ,$$

$$\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos.(\varphi - \varphi') = \beta^2 \ , \quad \text{talchè} \quad r^2 = \beta^2 + \xi^2 \ ,$$

e dicendo l la lunghezza dell'elemento cilindrico, trasformiamo così le (8') e (4') nelle

$$\Omega_1 = \iint \rho' d\rho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\varepsilon' d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} + \alpha \int d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} \ ,$$

$$U_1 = \iint \rho' d\rho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{u'\xi^2 d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \iint \rho'^2 \left(1 - \frac{\rho}{\rho'} \cos.(\varphi - \varphi')\right) d\rho' d\varphi' \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\sigma'\xi d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Se sviluppiamo nella prima di queste espressioni ε' ed e' secondo le potenze di ξ, ponendo

$$e' = e + \frac{de}{dx}\xi + \frac{1}{1.2}\frac{d^2e}{dx^2}\xi^2 + \ldots\ldots ,$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_0' + \frac{d\varepsilon_0'}{dx}\xi + \frac{1}{1.2}\frac{d^2\varepsilon_0'}{dx^2}\xi^2 + \ldots\ldots ,$$

ove ε_0' rappresenta il valore di ε' pel punto (x, ρ', φ') e non dipende che da t e da ρ', gli integrali rispetto alla variabile ξ, che figurano nei due termini di Ω_1, si scompongono in termini della forma

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n\varepsilon_0'}{dx^n}\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} , \quad \text{ed} \quad \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n e}{dx^n}\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l}\frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} .$$

Ora si ha

$$\int\frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \frac{1}{n}\xi^{n-1}\sqrt{\beta^2+\xi^2} - \frac{n-1}{n}\beta^2\int\frac{\xi^{n-2}d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} ,$$

ed

$$\int\frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \log.\left(\xi + \sqrt{\beta^2+\xi^2}\right) , \quad \int\frac{\xi d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \sqrt{\beta^2+\xi^2} ;$$

quindi il primo di quei termini, e *soltanto il primo* converge verso l'infinito mentre β converge verso zero. Nel nostro caso è α infinitamente piccolo; è perciò tale anche β, che è sempre compreso tra o e 2α; tutti gli altri termini scompaiono adunque a fronte del primo, e si può porre

$$\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{\varepsilon' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2\varepsilon_o' \log.\frac{l}{\beta}\ ,\qquad \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2\, e \log.\frac{l}{\beta}\ .$$

Portando questi valori nell'ultima espressione di Ω_1, ed osservando che le integrazioni rispetto a ρ' ed a φ' debbono estendersi fra i limiti o e α e fra i limiti o e 2π, si ottiene:

$$\Omega_1 = 2\pi \int_o^\alpha \rho' d\rho' . 2\varepsilon_o' \log. l + 2\pi\alpha . 2\, e \log. l$$

$$- 2\int_o^\alpha \rho' d\rho' \varepsilon_o' \int_o^{2\pi} d\varphi' \log.\beta - 2\alpha e \int_o^{2\pi} d\varphi' \log.\beta\ .$$

L'integrale

$$\int_o^{2\pi} d\varphi' \log.\beta = \frac{1}{2}\int_o^{2\pi} d\varphi' \log.\left(\rho^2+\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos.(\varphi-\varphi')\right)$$

vale $2\pi \log.\rho'$ se $\rho' > \rho$ e $2\pi \log.\rho$ se $\rho > \rho'$; quindi, poichè alla superficie è sempre $\rho' = \alpha > \rho$:

$$- 2\alpha e \int_o^{2\pi} d\varphi' \log.\beta = - 4\pi\alpha e \log.\alpha\ ,$$

e

$$- 2\int_o^\alpha \rho' d\rho' \varepsilon_o' \int_o^{2\pi} d\varphi' \log.\beta = - 4\pi \log.\rho \int_o^\rho \rho' d\rho' \varepsilon_o' - 4\pi \int_\rho^\alpha \rho' d\rho' \varepsilon_o' \log.\rho' .$$

Ma essendo α infinitamente piccolo, è facile convincersi, che non si trascurano che quantità infinitamente piccole, ponendo nell'ultima uguaglianza log. α invece di log. ρ e di log. ρ', cosicchè il secondo membro di quest'uguaglianza può ridursi a

$$-4\pi \log.\alpha \int_0^\alpha \rho' \varepsilon_0' d\rho' \;.$$

Se adunque si pone

$$(12) \ldots \qquad 2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \varepsilon_0' \rho' d\rho' = E \;,$$

si ottiene finalmente

$$(13) \ldots \qquad \Omega_1 = 2E \log.\frac{l}{\alpha} \;.$$

Evidentemente $E dx$ rappresenta la quantità di elettricità libera, che, parte all'interno, parte alla superficie, è contenuta nell'elemento dx del conduttore.

13. In modo analogo si può trattare l'espressione di U_1. In questa immagino u' e σ' sviluppati secondo le potenze di ξ mediante le serie

$$u' = u_0' + \frac{du_0'}{dx}\xi + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u_0'}{dx^2}\xi^2 + \ldots\ldots ,$$

$$\sigma' = \sigma_0' + \frac{d\sigma_0'}{dx}\xi + \frac{1}{1.2}\frac{d^2\sigma_0'}{dx^2}\xi^2 + \ldots\ldots ,$$

nelle quali u_0' e σ_0' rappresentano i valori di u e di σ nel punto (x, ρ', φ') e per un dato valore di x non sono funzioni che di t e di ρ'. Nelle parti, in cui l'espressione di U_1 si scompone così, appariscono integrali della forma

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \;,$$

i quali si calcolano mediante le relazioni

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n-2} \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} - \frac{n-1}{n-2}\beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} ,$$

$$\int \frac{\xi d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} ,$$

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} + \log.\left(\xi+\sqrt{\beta^2+\xi^2}\right) .$$

Degli integrali di questa forma, quand'essi sono presi tra i limiti $-\frac{l}{2}$ e $+\frac{l}{2}$, quello per cui $n=2$, e *soltanto quello* va all'infinito quando β va a zero. Per β infinitesimo adunque, come noi supponiamo, tutti gli altri scompariscono a fronte di questo, ed anche si può in questo trascurare il primo termine, che per β infinitesimo si conserva finito.

Quest'integrale dev'essere moltiplicato per

$$\rho' d\rho' d\varphi' \left[u_o' + \rho'\left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\cos.(\varphi-\varphi')\right)\frac{d\sigma_o'}{dx}\right] ,$$

ed il prodotto integrato rispetto a ρ' ed a φ' tra i limiti $\rho'=0$, $\rho'=\alpha$, e $\varphi'=0$, $\varphi'=2\pi$. Ma il termine in $\frac{d\sigma_o'}{dx}$ essendo moltiplicato per ρ'^2, è infinitamente piccolo rispetto a quello in u_o', e si potrà tralasciare; cosicchè si otterrà con un calcolo perfettamente identico a quello fatto per Ω_1:

$$U_1 = 4\pi \log. \frac{l}{\alpha} \int_0^\alpha u_o' \rho' d\rho' .$$

E se si pone

$$(14) \ldots \qquad 2\pi \int_0^\alpha u_o' \rho' d\rho' = i ,$$

se cioè si rappresenta con i l'intensità della corrente nella

sezione determinata dall'ascissa x, espressa, come al solito, in unità meccaniche, si ottiene finalmente

$$(15)\ldots \qquad U_1 = 2\,i \log.\frac{l}{\alpha}\ .$$

V.

Riduzione delle equazioni generali nel caso di un conduttore lineare.

14. Per passare dai valori trovati di Ω_1 ed U_1 a quelli di Ω e di U, si debbono aggiungere ai primi le parti che determinano l'azione sul punto (x, y, z) di tutti i punti del conduttore situati fuori dell'elemento cilindrico che abbiamo considerato.

Dicendo s un arco di conduttore, ed osservando, che, in grazia dell'ipotesi di α infinitamente piccolo, le dimensioni trasversali del filo si possono trascurare per tutti i punti posti a distanza finita da quello che si ha in mira, possiamo scrivere

$$(16)\ldots \qquad \Omega = 2\,E \log.\frac{l}{\alpha} + \int \frac{E'ds'}{r}\ ,$$

$$(16')\ldots \quad U = 2\,i \log.\frac{l}{\alpha} + \int i'\frac{ds'}{r}\cos.(r,ds)\cos.(r,ds')\ ,$$

dove gli integrali si debbono estendere a tutta la lunghezza del conduttore, meno l'elemento l.

$\int \frac{E'ds'}{r}$ ed $\int i'\frac{ds'}{r}\cos.(r,ds)\cos.(r,ds')$ sono funzioni di t e di s, la cui forma dipende dalla curva su cui è disposto il filo, e pelle quali dovranno in ogni caso essere dati i valori iniziali.

15. Ma nell'ipotesi di α infinitesimo, per un grandissimo numero di casi l'aggiunta di questi due termini non introduce

che quantità infinitamente piccole, e la quistione riesce notevolmente semplificata.

Si consideri innanzi tutto un conduttore *rettilineo;* in questo caso è chiaro che il ragionamento con cui si son trovati i valori di Ω_1 e di U_1 si può estendere non solo ad un elemento infinitamente breve, ma anche ad una porzione finita di filo. Basta, per convincersene, osservare che, purchè $\varepsilon', e', u', \sigma'$ sieno funzioni continue e finite per tutta l'estensione del circuito, esse si possono sempre sviluppare secondo le potenze di ξ, comunque ξ sia grande, purchè lo sviluppo si arresti dopo un numero finito n di termini, e lo si completi aggiungendovi il resto. Ora se con $f(x)$ si rappresenta una qualunque di queste funzioni, e con θ una frazione propria, il resto è

$$\frac{\xi^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\theta\xi) \ ,$$

e non introduce nel valore di Ω_1 od in quello di U_1 che un termine che scompare a fronte di quello dovuto al termine dello sviluppo corrispondente ad $n=1$ se si tratta di Ω_1 e ad $n=2$ se si tratta di U_1, purchè $f^n(x+\theta\xi)$ abbia un valore finito su tutto il tratto di circuito in questione. Dunque, se si rappresenta con l_1 la lunghezza di un tratto finito del filo, si avrà come al § precedente

$$\int_{-\frac{1}{2}l_1}^{+\frac{1}{2}l_1} \frac{\varepsilon' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2\varepsilon_0' \log. \frac{l_1}{\beta} \ , \qquad \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{+\frac{1}{2}l_1} \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2 e \log. \frac{l_1}{\beta} \ ,$$

e quindi per un punto della sezione che divide per metà il tratto cilindrico stesso

$$\Omega_1 = 2E \log. \frac{l_1}{\alpha} \ .$$

Mettendo in luogo di l, la totale lunghezza L del conduttore, si avrà il valore di Ω pel punto di questo situato a metà della sua lunghezza.

Se il punto per cui si vuole calcolare Ω non è quello che divide per metà la lunghezza del filo, ma è situato invece alla distanza $\frac{L}{n}$ da uno degli estremi, si debbono estendere gli integrali precedenti tra i limiti $-\frac{1}{n}L$ e $+\frac{n-1}{n}L$; e si ha così

$$\int_{-\frac{1}{n}L}^{+\frac{n-1}{n}L} \frac{\varepsilon' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2\varepsilon_0' \log.\frac{L}{\beta} + \log. 4\frac{n-1}{n^2} ,$$

$$\int_{-\frac{1}{n}L}^{+\frac{n-1}{n}L} \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2e \log.\frac{L}{\beta} + \log. 4\frac{n-1}{n^2} .$$

Ma finchè n non è infinitamente grande, nè uguale ad 1, il secondo termine di queste espressioni è trascurabile rispetto al primo, dunque si ha per tutti i punti del conduttore, eccettuati solo quelli che sono infinitamente vicini alle estremità,

$$(17)\ldots\quad \Omega = 2E\log.\frac{L}{\alpha}\,,\quad \text{e similmente}\quad U = 2i\log.\frac{L}{\alpha}\,.$$

Per un filo dato, per cui α abbia un valore determinato, queste espressioni daranno risultati tanto più prossimi al vero, quanto più sarà grande $\frac{L}{\alpha}$, e si potranno applicare a tutta la

lunghezza del filo, eccettuati due tratti situati ai due estremi e di lunghezza paragonabile al raggio α (*).

16. Per maggiore generalità abbiasi un filo di sezione infinitamente piccola disposto sopra una curva tale, che la distanza di due de' suoi punti, i quali comprendano un arco di lunghezza finita, non sia mai infinitamente piccola.

Se A rappresenta il punto che si ha in mira, e B, C sono due punti situati sul filo, uno da una parte, l'altro dall'altra di A a distanza finita da questo, l'integrale $\int \frac{E'ds'}{r}$ esteso a tutto il conduttore, tranne al tratto BAC, ha un valore finito, epperò trascurabile a fronte di $2E \log. \frac{l}{\alpha}$. Può perciò nell'equazione (16) quest'integrale essere esteso soltanto all'arco BAC, escluso l'elemento l. Detto σ l'arco compreso tra il punto considerato ed un altro punto qualunque, quell'integrale si scrive

$$\int_{\frac{l}{2}}^{\overline{AB}} \frac{E'd\sigma}{r} + \int_{\frac{l}{2}}^{\overline{AC}} \frac{E'd\sigma}{r},$$

od anche (convergendo $\frac{E'}{r}$ verso $\frac{E}{\sigma}$ col convergere di σ a zero, e perciò essendo gl'integrali

$$\int_{\frac{l}{2}}^{\overline{AB}} \left(\frac{E'}{r} - \frac{E}{\sigma}\right) d\sigma \quad \text{ed} \quad \int_{\frac{l}{2}}^{\overline{AC}} \left(\frac{E'}{r} - \frac{E}{\sigma}\right) d\sigma$$

finiti) trascurando ancora il finito a fronte dell'infinito.

(*) Quando, nel seguito, diremo le *estremità* del filo, intenderemo esclusi questi due tratti piccolissimi.

$$\int_{\frac{l}{2}}^{\overline{AB}} \frac{E\,d\sigma}{\sigma} + \int_{\frac{l}{2}}^{\overline{AC}} \frac{E\,d\sigma}{\sigma}\,,$$

cioè

$$E \log. \frac{2\,\overline{AB}}{l} + E \log. \frac{2\,\overline{AC}}{l}\ .$$

Le lunghezze $\overline{AB}, \overline{AC}$ sono arbitrarie, purchè finite, e si può quindi fare $AB = AC = \frac{1}{2}L$, onde

$$\Omega = 2\,E \log. \frac{l}{\alpha} + 2\,E \log. \frac{L}{l} = 2\,E \log. \frac{L}{\alpha}\ .$$

Analogamente si troverebbe

$$U = 2\,i \log. \frac{L}{\alpha}\ ,$$

e si ricade così sulle (17).

Risulta dal procedimento stesso con cui queste equazioni furono ottenute, che nel caso ideale di un filo di sezione infinitamente piccola non influiscono sullo stato elettrico di un punto del filo che gli stati elettrici de' punti a quello infinitamente vicini.

17. Sostituiamo questi valori di Ω e di U nella prima delle equazioni (7), che è l'unica che rimanga a considerarsi, e supponiamo che sul conduttore non agiscano forze elettromotrici emananti dall'esterno, onde sia $F = 0$, ed otteniamo

$$u = -4\,k\,.\log. \frac{L}{\alpha}\left(\frac{dE}{dx} + \frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right)\ .$$

Essendo il secondo membro di quest'equazione indipendente da ρ, anche u ne è indipendente, cosicchè si può scrivere, stante la (14),

$$i = \pi\,\alpha^2\,u\ ;$$

quindi

$$(18)\ldots \qquad i = -4\pi\alpha^2 k \log.\frac{L}{\alpha}\left(\frac{dE}{dx}+\frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right) .$$

Una seconda equazione tra le due quantità E ed i si ricava dalle equazioni (9′) e (10′). Non si ha che da moltiplicare la prima per $\rho\, d\rho\, d\varphi$, integrarla per tutta la sezione del filo, e sottrarne la seconda moltiplicata per $2\pi\alpha$; ricordando allora il significato di E, si arriva all'equazione

$$(19)\ldots \qquad \frac{di}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} .$$

18. Le equazioni differenziali (18) e (19) bastano alla soluzione di tutti i problemi, che si possono proporre sopra un conduttore che soddisfaccia alla condizione di non avere alcuno de' suoi punti situato a distanza infinitamente piccola da un altro suo punto separato da quello da un arco di lunghezza finita.

Integrate, esse dànno E ed i per ogni istante e per ogni punto del conduttore. Avuto E, la prima delle (17) dà Ω, e quindi la (11) ε, purchè per ε sia data la distribuzione iniziale. *Se il valore iniziale di ε è indipendente da ρ, esso se ne conserva sempre indipendente*, giacchè pella (17) Ω è indipendente da ρ, e nella (11) questa variabile non figura. Conosciuto ε, si può determinare e, e quando il valore iniziale di ε è indipendente da ρ, serve a ciò l'equazione

$$E = 2\pi\alpha e + \pi\alpha^2\varepsilon .$$

Finalmente nella stessa ipotesi è facile anche determinare σ. Siccome infatti la (9′) insegna, che perchè ε sia indipendente da ρ (*), σ dev'essere proporzionale a ρ stesso, e la (10′)

(*) Infatti la (9′) moltiplicata per $\rho\, d\rho$ ed integrata nell'ipotesi di u ed ε indipendenti da ρ, dà

$$\sigma = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dt}\right)+\frac{costante}{\rho} ,$$

e la costante è nulla, perchè altrimenti per $\rho = 0$ si avrebbe $\sigma = \infty$, il che è assurdo.

mostra, che per $\rho = \alpha$ dev'essere $\sigma = \frac{1}{2}\frac{de}{dt}$, si ha

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\alpha}\frac{de}{dt}.$$

VI.

Integrazione.

19. Noi dobbiamo ora integrare le due equazioni alle derivate parziali (18) e (19).

Le estremità del conduttore possono essere congiunte fra loro in modo che il filo formi da sè un circuito chiuso, od essere separate l'una dall'altra.

Nel primo caso non si hanno equazioni di condizione per le estremità, ed il problema si riduce a determinare E ed i per modo che sieno soddisfatte le equazioni (18) e (19) e le condizioni iniziali, e che E ed i sieno funzioni periodiche dell'arco s di conduttore aventi il periodo L.

Se invece gli estremi del filo sono separati l'uno dall'altro, essi possono essere posti in comunicazione ciascuno con una sorgente di elettricità, cioè con un corpo in cui il potenziale abbia un valore costante, come è il polo di una pila, come è la terra; od entrambi isolati, od isolato l'uno e l'altro unito ad una sorgente di elettricità. Quando un capo del filo è congiunto con una sorgente di elettricità, per quel capo, E ha un valore dato indipendente dal tempo; quando un capo è isolato, dev'essere per quello costantemente $i = 0$. In questo caso adunque le soluzioni delle equazioni differenziali (18) e (19) oltrechè alle condizioni iniziali debbono soddisfare ancora a due delle quattro equazioni *alle estremità:*

$$E_{s=0} = F, \quad i_{s=0} = 0, \quad E_{s=L} = G, \quad i_{s=L} = 0,$$

ove F e G sono costanti date. La soluzione di questo caso è più generale e comprende quella del primo.

20. Poniamo $\log\frac{L}{\alpha}=\gamma$, diciamo r la resistenza $\frac{L}{k\pi\alpha^2}$ del filo, introduciamo invece della variabile x la s, che rappresenta un arco di conduttore, e riscriviamo con queste nuove notazioni le due equazioni (18) e (19); il problema più generale, che noi dobbiamo risolvere, consiste nel trovare le due funzioni E ed i, le più generali di tutte quelle, che soddisfanno alle due equazioni così ottenute

$$(18')\ldots \qquad i=-4\gamma\frac{L}{r}\left(\frac{dE}{ds}+\frac{4}{c^2}\frac{di}{dt}\right) \,,$$

$$(19')\ldots \qquad 2\frac{di}{ds}=-\frac{dE}{dt} \,,$$

a due delle

$$[a]\ldots \quad E_{s=0}=F\,, \quad i_{s=0}=0\,, \quad E_{s=L}=G\,, \quad i_{s=L}=0\,,$$

ed alle due

$$[b]\ldots \qquad E_{t=0}=f(s)\,, \quad i_{t=0}=\varphi(s)\,.$$

Crescendo il tempo t fino all'infinito, lo stato elettrico del conduttore convergerà verso uno stato di reggime, nel quale la carica E e l'intensità i non saranno più funzioni che di s. Se diciamo E' ed i' queste funzioni, abbiamo, per determinarle, le due equazioni

$$(18'')\ldots \qquad i'=-4\gamma\frac{L}{r}\frac{dE'}{ds} \,,$$

$$(19'')\ldots \qquad 2\frac{di'}{ds}=0 \,,$$

che dànno

$$(20)\ldots \qquad \begin{cases} E'=a+bs \,, \\ i'=-4\gamma\frac{L}{r}b \,. \end{cases}$$

a e b sono due costanti, che si possono sempre determinare in modo che le (20) soddisfacciano alle due $[a]$.

Ora poniamo

$$(21)\ldots \qquad E=E'+E'' \ , \qquad i=i'+i'' \ ;$$

portando questi valori nelle (18'), (19'), $[a]$, $[b]$, e ricordando che E' ed i' soddisfanno alle (18''), (19''), ed alle $[a]$, si trova, che le funzioni E'', i'' debbono soddisfare alle due equazioni

$$(18''')\ldots \qquad i''=-4\gamma\frac{L}{r}\left(\frac{dE''}{ds}+\frac{4}{c^2}\frac{di''}{dt}\right) \ ,$$

$$(19''')\ldots \qquad 2\frac{di''}{ds}=-\frac{dE''}{dt} \ ,$$

a due delle

$$[a']\ldots \ E''_{s=0}=0 \ , \quad i''_{s=0}=0 \ , \quad E''_{s=L}=0 \ , \quad i''_{s=L}=0$$

ed alle due

$$[b']\ldots \qquad E''_{t=0}=f(s)-E' \ , \quad i''_{t=0}=\varphi(s)-i' \ .$$

Per valori di s compresi tra $-L$ e $+L$ le funzioni date $f(s)$, $\varphi(s)$ possono mettersi sotto la forma

$$f(s)=\frac{1}{2}b^\circ_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(a^\circ_n \,\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}s+b^\circ_n \cos.\, n\frac{\pi}{L}s\right) \ ,$$

$$\varphi(s)=\frac{1}{2}f^\circ_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(c^\circ_n \,\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}s+f^\circ_n \cos.\, n\frac{\pi}{L}s\right) \ ,$$

ove a°_n, b°_n, c°_n, f°_n sono quantità note; e le funzioni incognite E'', i'', qualunque esse abbiano da essere, potranno sempre essere espresse dalle serie

$$(22)\ldots\left\{\begin{aligned} E''&=\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\mathrm{sen.}\,n\frac{\pi}{L}s+b_n\cos.n\frac{\pi}{L}s\right)\ ,\\ i''&=\frac{1}{2}f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\,\mathrm{sen.}\,n\frac{\pi}{L}s+f_n\cos.n\frac{\pi}{L}s\right)\ ,\end{aligned}\right.$$

ove a_n e b_n sono funzioni di t. La quistione è ridotta a trovare queste funzioni.

Perciò osservo che se si sostituiscono nelle equazioni ($18'''$) e ($19'''$) ad E'' ed i'' le loro espressioni (22), le equazioni, che ne risultano, debbono essere soddisfatte per tutti i valori di s; onde ho dalle ($19'''$)

$$b_0=\text{costante}\ ,\quad c_n=-\frac{L}{2n\pi}\frac{db_n}{dt}\ ,\quad f_n=\frac{L}{2n\pi}\frac{da_n}{dt}$$

e quindi dalla ($18'''$):

$$f_0=\beta e^{-\frac{c^2r}{16\gamma L}t}\ ,\quad \text{ove}\quad \beta=\text{costante}\ ,$$

e

$$(23)\ldots\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2a_n}{dt^2}+\frac{c^2r}{16\gamma L}\frac{da_n}{dt}+\frac{c^2\pi^2n^2}{2L^2}a_n=0\ ,\\ &\frac{d^2b_n}{dt^2}+\frac{c^2r}{16\gamma L}\frac{db_n}{dt}+\frac{c^2\pi^2n^2}{2L^2}b_n=0\ .\end{aligned}\right.$$

Gli integrali generali di queste equazioni differenziali sono

$$(23')\ldots\left\{\begin{aligned} a_n&=C_1e^{-\lambda_1t}+C_2e^{-\lambda_2t}\ ,\\ b_n&=C_1'e^{-\lambda_1t}+C_2'e^{-\lambda_2t}\ ,\end{aligned}\right.$$

ove le C sono le costanti arbitrarie, e λ_1, λ_2 sono le due radici dell'equazione di 2° grado

$$\lambda^2-\frac{c^2r}{16\gamma L}\lambda+\frac{c^2\pi^2n^2}{2L^2}=0\ ,$$

sono cioè i due valori di

$$\frac{c^2 r}{32\gamma L}\left\{1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}n\pi\right)^2}\right\} .$$

Avuti a_n e b_n, le relazioni precedenti dànno subito c_n ed f_n.

Le equazioni (20), (21), (22), (23′) contengono la soluzione generale del problema. Ponendo per brevità

$$(24)\ldots \qquad h=\frac{c^2 r}{32\gamma L} ,$$

possiamo riassumere questa soluzione nel seguente quadro:

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&E=a+bs+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(a_n \,\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}s+b_n \cos.\, n\frac{\pi}{L}s\right) ,\\
&i=-4\gamma\frac{L}{r}b+\frac{1}{2}\beta e^{-2ht}-\frac{L}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\,\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}s-\frac{da_n}{dt}\cos.\, n\frac{\pi}{L}s\right) ,\\
&a_n=C_1 e^{-\lambda_1 t}+C_2 e^{-\lambda_2 t} ,\\
&b_n=C_1' e^{-\lambda_1 t}+C_2' e^{-\lambda_2 t} ,\\
&\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\}=\frac{c^2 r}{32\gamma L}\left\{1\pm\sqrt{1-\left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}n\pi\right)^2}\right\}=h\pm\sqrt{h^2-\frac{c^2\pi^2 n^2}{2L^2}} ,
\end{aligned}\right.$$

La costante b_0 s'intende compresa nella a.

Le equazioni $[a']$, $[b']$, ed i dati valori dei coefficienti a_n°, b_n°, c_n°, f_n° degli sviluppi di $f(s)$, $\varphi(s)$ basteranno a determinare le costanti C e β.

Se i due capi del filo fossero uniti tra loro, non si avrebbero le condizioni $[a]$ per determinare a e b, ma per compenso si saprebbe che E ed i, come $f(s)$ e $\varphi(s)$, debbono essere funzioni periodiche ed avere il periodo L, per la qual cosa dovrebbe essere n un numero pari, e $b=0$. Non resterebbero adunque da determinarsi che le C, la a e la β, al che bastano i valori dati di $f(s)$ e di $\varphi(s)$.

Nelle applicazioni noi ci occuperemo particolarmente del

caso in cui per $t=0$ è $i=0$. In questo caso dovrà essere $\frac{1}{2}\beta=4\gamma\frac{L}{r}b$, onde

$$i=-4\gamma\frac{L}{r}b\left(1-e^{-2ht}\right)-\frac{L}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{db_n}{dt}\operatorname{sen.}n\frac{\pi}{L}s-\frac{da_n}{dt}\cos.n\frac{\pi}{L}s\right).$$

VII.

1° Caso. $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ *è infinitamente grande.*

21. Discuteremo le equazioni trovate, prima supponendo che la quantità $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ abbia un valore infinitamente grande, poi supponendola finita, e finalmente facendola convergere verso zero. L'esame del primo e dell'ultimo caso ci darà i limiti verso i quali convergono le leggi della propagazione dell'elettricità, mentre, stando le stesse le altre circostanze, la resistenza del conduttore converge verso zero, o cresce sopra ogni limite; quello del secondo caso ci darà le vere leggi che si verificheranno ne' casi praticamente realizzabili, e ci mostrerà come quelle si modifichino successivamente, passando dall'uno all'altro limite.

22. Cominciamo dal primo caso. Le radici λ_1 e λ_2 sono immaginarie qualunque sia n, e si riducono a

$$\lambda_1=h+\frac{cn\pi}{L\sqrt{2}}\sqrt{-1}\ ,\qquad \lambda_2=h-\frac{cn\pi}{L\sqrt{2}}\sqrt{-1}\ .$$

Introducendo allora nuove costanti, si possono mettere a_n e b_n sotto la forma

$$a_n=e^{-ht}\left(A\cos.n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t+B\operatorname{sen.}n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t\right)\ ,$$

$$b_n=e^{-ht}\left(A'\cos.n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t+B'\operatorname{sen.}n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t\right)\ ;$$

e di qui in grazia delle

$$c_n = -\frac{L}{2n\pi}\frac{db_n}{dt}\,, \quad f_n = \frac{L}{2n\pi}\frac{da_n}{dt}\,,$$

$$c_n = \frac{e^{-ht}}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{hL}{n\pi}A' - \frac{c}{\sqrt{2}}B'\right)\cos.\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \\ + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}A' + \frac{hL}{n\pi}B'\right)\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \end{array}\right],$$

$$f_n' = -\frac{e^{-ht}}{2}\left[\begin{array}{l} \left(\frac{hL}{n\pi}A - \frac{c}{\sqrt{2}}B\right)\cos.\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \\ + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}A + \frac{hL}{n\pi}B\right)\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \end{array}\right].$$

Io supporrò che per $t=0$ sia $i=0$ in tutti i punti del conduttore. Questa condizione vuole che:

$$B = \frac{A}{\frac{nc\pi}{hL\sqrt{2}}}\,, \qquad B' = \frac{A'}{\frac{nc\pi}{hL\sqrt{2}}}\,.$$

Ora $\frac{c}{hL\sqrt{2}}$ è uguale a $\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}$, quantità, per ipotesi, infinitamente grande; dunque nel caso considerato le costanti B e B' debbono essere infinitamente piccole, e si può porre

$$a_n = Ae^{-ht}\cos.\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t\,, \qquad b_n = A'e^{-ht}\cos.\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t\,,$$

$$c_n = \frac{c}{2\sqrt{2}}e^{-ht}A'\,\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t\,, \quad f_n = -\frac{c}{2\sqrt{2}}Ae^{-ht}\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t\,.$$

Le espressioni generali di E e di i si riducono così, nel caso di una resistenza infinitamente piccola e nell'ipotesi che per $t=0$ sia $i=0$, alle:

$$(26)\begin{cases} E = a + bs \\ \quad + e^{-ht}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A_n \cos. n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \operatorname{sen}. n\frac{\pi}{L}s + A_n' \cos. n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \cos. n\frac{\pi}{L}s\right), \\ i = -4\gamma\frac{L}{r}b\left(1 - e^{-2ht}\right) \\ \quad - \frac{c}{2\sqrt{2}}e^{-ht}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A_n \operatorname{sen}. n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \cos. n\frac{\pi}{L}s - A_n' \operatorname{sen}. n\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t \operatorname{sen}. n\frac{\pi}{L}s\right). \end{cases}$$

VIII.

Applicazione ad un conduttore formante da sè un circuito chiuso.

23. Abbiasi dapprima un conduttore, i cui due capi sieno congiunti tra loro. E ed i debbono in questo caso avere in ogni istante per $s = L$ i medesimi valori, che hanno per $s = 0$, e ciò da qualunque origine si valutino le s. Perciò è necessario e sufficiente, che sia

$$b = 0 \qquad \text{ed} \qquad n = 2m$$

essendo m un numero intiero. Onde, essendo dato

$$E_{t=0} = f(s) = \frac{1}{2}b^\circ_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty}\left(a^\circ_m \operatorname{sen}. m\frac{2\pi}{L}s + b^\circ_m \cos. m\frac{2\pi}{L}s\right),$$

e determinando con questo le costanti arbitrarie in (26), si ha

$$E = \frac{1}{2}b^\circ_0 + e^{-ht}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\begin{array}{c} a^\circ_m \cos. m\frac{2\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t . \operatorname{sen}. m\frac{2\pi}{L}s \\ + b^\circ_m \cos. m\frac{2\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t . \cos. m\frac{2\pi}{L}s \end{array}\right],$$

$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-ht} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\begin{array}{l} a^{\circ}_m \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cos.\, m \frac{2\pi}{L} s \\ - b^{\circ}_m \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} \frac{c}{\sqrt{2}} t \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} s \end{array} \right] .$$

21. Si trasformino i prodotti di seni e coseni contenuti sotto i segni Σ in somme mediante le formole

$$\cos. x \,\text{sen.}\, y = \frac{1}{2} \text{sen.} (y + x) + \frac{1}{2} \text{sen.} (y - x) \quad ,$$

$$\cos. x \cos. y = \frac{1}{2} \cos. (y + x) + \frac{1}{2} \cos. (y - x) \quad ,$$

$$\text{sen.}\, x \,\text{sen.}\, y = -\frac{1}{2} \cos. (y + x) + \frac{1}{2} \cos. (y - x) \quad ,$$

e si vedrà che le espressioni di E e di i si riducono così ad

$$E = \frac{l}{2} b^{\circ}_{o} + \frac{1}{2} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) - b^{\circ}_{o} \right] \quad ,$$

$$i = -\frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) - f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) \right] .$$

Si sa che

$$\frac{1}{2} b^{\circ}_{o} = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(s)\, ds \quad ;$$

$\frac{1}{2} b^{\circ}_{o} L$ è adunque la totale quantità di elettricità libera contenuta nel conduttore, ed $\frac{1}{2} b^{\circ}_{o}$ la media quantità di elettricità libera distribuita sull'unità di lunghezza del filo.

25. Le espressioni di E e di i, alle quali siamo arrivati, mostrano un'analogia rimarchevole tra la propagazione dell'elettricità nei fili e la propagazione del suono in una corda od in un'asta vibrante longitudinalmente, o finalmente in un

fluido elastico contenuto in un tubo. In quest'ultimo caso per esempio si sa, che la condensazione δ e la velocità u in uno straterello preso nella massa gazosa e limitato da due piani infinitamente vicini e normali all'asse s del tubo, sono date, quando inizialmente si abbia $u=0$, $\delta=f(s)$, da

$$\delta = \frac{1}{2}f(s+vt)+\frac{1}{2}f(s-vt) \quad ,$$

$$u=-\frac{v}{2}f(s+vt)+\frac{v}{2}f(s-vt) \quad ,$$

ove v è la velocità di propagazione del suono nel mezzo considerato. Or bene si supponga $b^{o}_{o}=0$, cioè si consideri il caso, in cui la media quantità di elettricità libera contenuta nel conduttore è nulla, e si faccia $v=\frac{c}{\sqrt{2}}$: le espressioni di E e di i non differiranno allora da quelle di δ e di u, che pel fattore e^{-ht} la prima e pel fattore $\frac{e^{-ht}}{2}$ la seconda.

Così l'elettricità si trasmette lungo un conduttore lineare di resistenza infinitamente piccola — come il suono in un tubo indefinito — sotto forma di due onde uguali, che si propagano in versi opposti con un'uguale velocità $\frac{c}{\sqrt{2}}$. Ma mentre queste onde si propagano, la carica elettrica e l'intensità della corrente vanno diminuendo in tutti i punti del circuito proporzionalmente ad e^{-ht}. Questa diminuzione però è lentissima a fronte della velocità di propagazione. Imperocchè il tempo che un'onda impiega a percorrere una volta tutto il circuito è $\frac{L\sqrt{2}}{c}$, e quindi il rapporto dei due valori che E ha in un medesimo punto al principio ed al fine di quel tempo è

$$1 : e^{-\frac{hL\sqrt{2}}{c}} \, ,$$

valore vicinissimo all'unità, giacchè, per le ipotesi fatte, l'esponente di e è infinitamente piccolo.

Se b°_{0} non è uguale a zero, ossia se la media quantità di elettricità libera riferita all'unità di lunghezza non è nulla, l'eccesso del valore di E sopra il suo valor medio varia colla stessa legge con cui varierebbe E se questo fosse $= 0$.

La velocità di propagazione è, in questo caso limite, indipendente dalla natura del conduttore, e vale

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{439450^{\text{mm}}.10^{6}}{\sqrt{2}} = 310738^{\text{mm}}.10^{6} ,$$

numero molto prossimamente uguale a quello, che esprime la velocità della luce negli spazi interstellari.

IX.

Applicazione ad un conduttore, i cui due capi sono separati.

26. I casi in cui gli estremi del filo sono entrambi isolati, od entrambi in comunicazione col suolo, od uno è isolato e l'altro comunica a terra, sono facili a trattarsi. Si trova allora, che ad ogni capo del filo v'ha riflessione dell'onda, e che questa riflessione avviene senza o con cambiamento di segno, secondochè l'estremo di filo corrispondente è congiunto colla terra od è isolato. Un estremo a terra corrisponde in certo qual modo ad un estremo libero di una sbarra vibrante longitudinalmente, ad un estremo aperto di una canna sonora; una estremità isolata di conduttore ad un estremo fisso di quella sbarra, ad un'estremità chiusa di quel tubo.

27. Che cosa succeda quando i due capi del conduttore sono posti in comunicazione ciascuno con una sorgente di elettricità vediamolo con un esempio.

Immaginiamo un filo sul quale non siavi inizialmente alcuna carica elettrica; una sua estremità sia in comunicazione colla terra; l'altra venga nell'istante $t=0$ posta repentinamente in comunicazione con un polo di una pila di cui l'altro polo è in contatto col suolo, e sia lasciato poi in questa condizione. La resistenza della pila sia trascurabile.

Prendiamo per origine delle s l'estremità del filo che è in comunicazione colla terra; il potenziale dell'elettricità libera dovrà sempre essere $=0$ per $s=0$, e sempre essere uguale ad una costante per $s=L$. Se K è la forza elettromotrice della pila (*), questa costante ha il valore $\frac{1}{2}K$. Le condizioni alle quali E ed i debbono soddisfare, sono perciò le seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{Per } s=0 & \text{dev'essere} & E=0 \\ \phantom{\text{Per }} s=L & & E=\frac{1}{4\gamma}K \\ \phantom{\text{Per }} t=0 & & E=0\ . \end{array}$$

Per soddisfare alla prima condizione dev'essere

$$a=0 \qquad \text{ed} \qquad A'=0\ ;$$

ed acciocchè per $s=L$ sia $E=\frac{1}{4\gamma}K$, è necessario che sia

$$b=\frac{1}{4\gamma L}K\ .$$

Ponendo per brevità

(*) Intendiamo qui, come suolsi parlando di correnti costanti, per forza elettromotrice della pila la differenza algebrica dei valori del potenziale ai due poli, differenza, che è proporzionale a quella delle tensioni elettrostatiche ai poli medesimi, e che non dipende che dal sistema di pila e dal numero de' suoi elementi.

$$\frac{\pi}{L}\frac{c}{\sqrt{2}}t=\tau \ , \qquad \frac{\pi}{L}s=\varphi \ ,$$

si'ha adunque

$$E=\frac{K}{4\gamma L}s+e^{-ht}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n \cos. n\tau \operatorname{sen}. n\varphi \ .$$

A determinare le costanti A serve l'ultima condizione data. Secondo questa si deve avere per ogni valore di φ compreso tra 0 e π

$$\frac{K}{4\gamma\pi}\varphi=-\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n \operatorname{sen}. n\varphi \ ;$$

ma pel teorema di Fourier vale fra i medesimi limiti l'uguaglianza:

$$\varphi=-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\operatorname{sen}. n\varphi \ ;$$

dunque si deve porre

$$A_n=2.(-1)^n\frac{K}{4\gamma\pi}\frac{1}{n} \ ,$$

onde

$$(27)\ldots \qquad E=\frac{K}{4\gamma}\left(\frac{s}{L}+\frac{2}{\pi}e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos. n\tau \operatorname{sen}. n\varphi\right) \ .$$

Si ha similmente per i (*)

$$(28)\ i=-\frac{K}{r}(1-e^{-2ht})-\frac{cK}{4\sqrt{2}\gamma\pi}e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}. n\tau . \cos. n\varphi \ .$$

(*) Helmholtz nella sua teoria dell'estracorrente (Vedine un sunto negli *Annales de Chimie et de Physique*, tom. XXII, pag. 491) dà la formola

$$i=\frac{k}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{p}t}\right) ,$$

ove p è una quantità, che egli non determina e che chiama *potenziale*.

28. Vediamo qual sia il significato di queste espressioni, e cominciamo da quella di i.

Nella somma, che figura nell'espressione di i, consideriamo φ come una costante, e riguardiamo questa somma come una funzione di τ. Questa funzione è periodica col periodo 2π; essa ha inoltre valori uguali e di segno contrario per τ, e per $2\pi-\tau$; basta quindi cercare i valori che essa prende quando τ varia tra 0 e π. Si può scrivere:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen.} n\tau \,.\, \cos. n\varphi = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen.} n(\tau+\varphi) + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen.} n(\tau-\varphi) \;.$$

Ora la somma

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen.} nx$$

quando x è compreso tra $-\pi$ e $+\pi$, ha il valore $-\frac{x}{2}$, e siccome essa è periodica col periodo 2π, essa è in generale

$$= -\frac{1}{2}(x-2p\pi) \;,$$

essendo p quel numero intiero per cui $x-2p\pi$ è compreso tra $-\pi$ e $+\pi$.

Quest'espressione non è altro che il primo termine di quella che noi abbiamo trovato, e vi saremmo arrivati anche noi se, come Helmholtz, avessimo supposto i funzione semplicemente di t. Le conseguenze di questa formola sono in pieno accordo coi fenomeni che si osservano nelle macchine d'induzione; ed è chiaro infatti che in questi casi questo termine rappresenta l'andamento generale della funzione, e la somma, di cui vedremo il significato, non rappresenta che le perturbazioni, che sfuggono all'osservazione.

Pei limiti che abbiamo assunto per τ, $\tau-\varphi$ è sempre compreso tra $-\pi$ e $+\pi$, poichè, per qualunque punto del filo, φ è compreso tra 0 e π; perciò

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \text{sen.}\, n(\tau-\varphi) = -\frac{\tau-\varphi}{2} .$$

Al contrario il valore di $\tau+\varphi$ può essere minore o maggiore di π, e si ha

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \text{sen.}\, n(\tau+\varphi) = -\frac{\tau+\varphi}{2}, \quad \text{quando } \varphi < \pi - \tau$$

e

$$= -\frac{\tau+\varphi}{2} + \pi, \quad \text{»} \quad \varphi > \pi - \tau .$$

Ne segue che

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{m} \text{sen.}\, n\tau \cos.\, n\varphi = -\frac{\tau}{2}, \qquad \text{quando } \varphi < \pi - \tau$$

$$= -\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2}, \qquad \text{»} \quad \varphi > \pi - \tau .$$

In tutto ciò si è supposto τ compreso tra 0 e π; se esso fosse invece compreso tra π e 2π, si sarebbero ottenuti i valori

$$\pi - \frac{\tau}{2}, \quad \text{per} \quad \varphi < \tau - \pi ,$$

e

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2}, \quad \text{»} \quad \varphi > \tau - \pi .$$

Per valori di τ maggiori di 2π basterà ricordare che la somma considerata è una funzione periodica di periodo 2π.

Or ecco le conseguenze che possiamo dedurre dall'analisi precedente. In ogni istante v'ha un punto del conduttore, nel quale l'intensità della corrente varia bruscamente, fa *un salto*. Questo punto è determinato dall'equazione

$$\varphi = \pi - \tau \ , \quad \text{ossia} \quad s = L - \frac{c}{\sqrt{2}} t$$

finchè τ è compreso tra 0 e π, cioè t è minore di $\frac{L}{\frac{c}{\sqrt{2}}}$, e dall'equazione

$$\varphi = \tau - \pi \ , \quad \text{ossia} \quad s = \frac{c}{\sqrt{2}} t - L$$

quando τ varia da π a 2π, cioè t varia da $\frac{L}{\frac{c}{\sqrt{2}}}$ a $\frac{2L}{\frac{c}{\sqrt{2}}}$, e così di seguito. Per $t=0$ adunque questo punto si trova all'estremità $(s=L)$ del filo; s'avanza poi colla velocità uniforme $\frac{c}{\sqrt{2}}$ verso l'origine $(s=0)$ del conduttore; trascorso il tempo $\frac{L}{\frac{c}{\sqrt{2}}}$, esso ha raggiunto questo capo del filo, e prende a muoversi colla stessa velocità verso l'estremità da cui era partito; poi ripercorre il filo nel senso di prima, e così via via sempre colla medesima velocità. In ciascuna delle due parti, in cui in un istante qualunque l'intero conduttore trovasi diviso da quel punto, v'ha un'intensità di corrente che non dipende che da τ, e che perciò è la stessa in ogni punto; talchè se si rappresenta il valore dell'intensità coll'ordinata, quello di s coll'ascissa di una linea, questa avrà la forma disegnata nella *Fig.* 1ª.

Fig. 1ª.

In qualunque senso avvenga, nel momento considerato, il movimento del punto, in cui ha luogo il salto, la maggiore intensità si ha sempre dietro a questo punto, cioè nel tratto di conduttore ch'esso ha già percorso, e la minore avanti al punto, cioè in tutto il tratto ch'esso ha ancora da percorrere. La *Fig.* 1ª vale perciò soltanto per un istante in cui quel punto compie la corsa diretta dalla pila al suolo, dalla fine del filo verso l'origine. La *Fig.* 2ª si riferisce ad un istante in cui avviene il movimento opposto.

Fig. 2ª.

In questa come nella precedente figura la freccia superiore indica il senso del movimento del risalto, e l'inferiore il senso, sempre negativo, della corrente. La grandezza del salto è

$$= \frac{cK}{8\sqrt{2}.\gamma} e^{-ht} \quad ,$$

ossia, dicendo I il valore verso cui tende i col crescere di t, cioè $\frac{K}{r}$:

$$= I . \frac{cr}{8\sqrt{2}\gamma} e^{-ht} \; .$$

Questa grandezza ha il suo massimo valore per $t = 0$, ma sempre, pelle ipotesi fatte, è piccolissima a fronte di I. Se diciamo T il tempo che il risalto o l'*onda* elettrica impiega per percorrere tutta la lunghezza del filo, talchè sia $T = \frac{L\sqrt{2}}{c}$, possiamo anche esprimere la grandezza del salto così:

$$I . 2\,h\,T e^{-ht} \; .$$

Col crescere di t diminuisce adunque bensì la grandezza del salto, ma diminuisce così lentamente, che il decremento, che essa subisce durante il tempo T, è estremamente piccolo.

29. Cerchiamo come varii l'intensità della corrente all'estremo del filo che è in comunicazione colla terra. Questa intensità, che diremo i_o, si ha ponendo $s=0$ nell'espressione di i. Introducendo le notazioni I e T e non considerando che il valore assoluto, si ottiene così:

$$i_o = I(1-e^{-2ht}) + \frac{4hIT}{\pi} e^{-ht} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{sen.}\, n\tau \ .$$

Ponendo nella somma il suo valore, ed osservando che

$$\frac{\tau}{\pi} = \frac{t}{T} \ ,$$

si ha quindi:

$$i_o = I(1-e^{-2ht}) + 2h.Ie^{-ht}(2pT-t) \ ,$$

ove p ha il significato che aveva poc'anzi, ovvero, ciò che vale lo stesso, è quel numero intiero per cui $\frac{t-2pT}{T}$ è una frazione propria positiva o negativa.

Per valori di t non grandissimi, l'espressione di i_o è suscettibile ancora di una semplificazione. Allora infatti ht è piccolissimo, e trascurandone le potenze superiori alla prima, si può scrivere

$$i_o = 2ht.I + 2hI(2pT-t) \ ,$$

ossia

$$(28)\ldots \qquad i_o = 4phT.I \ .$$

Ciò c'insegna che l'intensità nell'estremo $(s=0)$ è nulla finchè t non ha raggiunto il valore T; in questo istante prende d'un tratto il valore $4hTI$, che conserva costante fin dopo il tempo $t=3T$; allora passa bruscamente al valore $8hTI$, e così di seguito va crescendo per salti, che si succedono ad ogni

intervallo di tempo $=2T$, e la cui grandezza è doppia di quella del salto, che ha luogo successivamente in tutti gli altri punti del conduttore.

30. In modo analogo si può discutere l'espressione di E. Si ha:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \cos. n\tau . \text{sen}. n\varphi = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \text{sen}. n(\tau+\varphi)$$

$$- \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \text{sen}. n(\tau-\varphi) \ ,$$

ossia, quando τ è compreso tra 0 e π:

$$= -\frac{\varphi}{2} \qquad \text{per} \quad \varphi < \pi - \tau \ ,$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{per} \quad \varphi > \pi - \tau \ ;$$

e quando τ è compreso tra π e 2π:

$$= -\frac{\varphi}{2} \qquad \text{per} \quad \varphi < \tau - \pi \ ,$$

$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{per} \quad \varphi > \tau - \pi \ .$$

Questi ultimi valori si deducono dai primi osservando che la somma deve aver lo stesso valore per τ e per $2\pi-\tau$. Per maggiori valori di τ non si ha che da osservare che la funzione è periodica ed ha il periodo 2π.

Di qui si deduce che in ogni istante v'ha un punto del filo, passando dall'una parte all'altra del quale, E cambia bruscamente di valore. Il punto ove ha luogo il salto coincide sempre con quello ove cambia repentinamente il valore di i. Ma mentre per i il salto ha luogo ora in un senso, ora nell'altro, a seconda del senso del suo movimento, per E invece si ha sempre (fatta

astrazione del segno) il minor valore dalla parte di $s=0$, cioè verso l'estremo *a terra* del filo. L'altezza del salto è

$$=\frac{K}{4\gamma}e^{-ht} \ ,$$

ossia, rappresentando con E_0 il valore costante che E ha al polo della pila:

$$=E_0 e^{-ht} \ .$$

Tra l'origine del filo ed il luogo del salto si ha

$$E=E_0\frac{s}{L}(1-e^{-ht}) \ ,$$

e tra il sito del salto e l'estremo congiunto alla pila:

$$E=E_0\left(\frac{s}{L}(1-e^{-ht})+e^{-ht}\right) \ .$$

Se si prendono le s per ascisse e le E per ordinate, la funzione E di s, per un dato istante, sarà rappresentata da una linea spezzata della forma disegnata nella *Fig.* 3ª.

Fig. 3ª.

Questa linea varia col tempo: per t piccolissimo avrà molto prossimamente la forma *Fig.* 4ª;

Fig. 4ª.

crescendo invece t, l'angolo de' due tratti coll'asse delle ascisse

crescerà avvicinandosi al limite *angolo* $\left(\text{tang.} = \frac{E_0}{L}\right)$; ed intanto il salto diminuirà gradatamente d'altezza. Al limite si avrebbe una linea retta unica, *Fig.* 5ª,

Fig. 5ª.

come vuole la legge di Ohm.

X.

2° Caso. $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ *è finito; λ_1 e λ_2 sono immaginarii.*

31. Quando $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ è finito, i valori (25) di λ_1 e λ_2 possono essere reali od immaginarii, e ciò dipende dal valore di $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$, che è determinato per ogni conduttore, e dal numero n, cioè dal numero d'ordine del termine che si vuol considerare nelle somme che dànno E'' ed i''.

32. Per piccoli valori della resistenza r, si verifica, per tutti o per la massima parte dei termini di quelle serie, il secondo caso.

Ponendo allora

$$(29) \ldots \qquad \mu^2 = \frac{c^2 n^2 \pi^2}{2L^2} - h^2 \ ,$$

i valori di λ_1 e λ_2, per ipotesi immaginarii, si scrivono

$$\lambda_1 = h + \mu\sqrt{-1} \ , \qquad \lambda_2 = h - \mu\sqrt{-1} \ ,$$

ove μ è reale; ed introducendo nuove costanti, i valori (23') di a_n e b_n si possono mettere sotto la forma:

$$a_n = A e^{-ht} \operatorname{sen.} \mu (t - A') \ ,$$
$$b_n = B e^{-ht} \operatorname{sen.} \mu (t - B') \ .$$

Se ci limitiamo a considerare il caso in cui i due capi del conduttore sono congiunti uno all'altro, sarà $b=0$, ed invece di n si dovrà mettere nelle (25) $2m$; e se inoltre supponiamo, per ora, che la media quantità di elettricità libera distribuita inizialmente sull'unità di lunghezza del filo, e la media intensità iniziale della corrente sieno nulle, sarà $b_o^{\circ}=0$, $f_o^{\circ}=0$, e quindi dovrà essere $\alpha=0$, $\beta=0$. E, ed i si ridurranno così ad

$$E = \sum \left(a_m \operatorname{sen.} m \frac{2\pi}{L} s + b_m \cos. m \frac{2\pi}{L} s \right) \ ,$$

$$i = -\frac{L}{4\pi} \sum \frac{1}{m} \left(\frac{d b_m}{dt} \operatorname{sen.} m \frac{2\pi}{L} s - \frac{d a_m}{dt} \cos. m \frac{2\pi}{L} s \right) \ ;$$

ed analogamente i loro valori iniziali dati potranno mettersi sotto la forma:

$$E_{t=0} = f(s) = \sum \left(a_m{}^{\circ} \operatorname{sen.} m \frac{2\pi}{L} s + b_m{}^{\circ} \cos. m \frac{2\pi}{L} s \right) \ ,$$

$$i_{t=0} = \varphi(s) = -\frac{L}{4\pi} \sum \frac{1}{m} \left(\frac{d b_m{}^{\circ}}{dt} \operatorname{sen.} m \frac{2\pi}{L} s - \frac{d a_m{}^{\circ}}{dt} \cos. m \frac{2\pi}{L} s \right) .$$

I coefficienti $a_m{}^{\circ}$, $b_m{}^{\circ}$, $\frac{d a_m{}^{\circ}}{dt}$, $\frac{d b_m{}^{\circ}}{dt}$ sono quantità note, alle quali debbono diventare uguali le funzioni a_m, b_m, $\frac{d a_m}{dt}$, $\frac{d b_m}{dt}$ quando si fa $t=0$. Si hanno adunque, per determinare le costanti arbitrarie A, A', B, B', le equazioni

$$a_m^\circ = -A \,\text{sen.}\, \mu A' \ ,$$

$$b_m^\circ = -B \,\text{sen.}\, \mu B' \ ,$$

$$\frac{d a_m^\circ}{dt} = \mu A \cos.\, \mu A' - h a_m^\circ \ ,$$

$$\frac{d b_m^\circ}{dt} = \mu B \cos.\, \mu B' - h b_m^\circ \ ,$$

dalle quali

$$A = \sqrt{\left\{ a_m^{\circ 2} + \frac{1}{\mu^2}\left(h a_m^\circ + \frac{d a_m^\circ}{dt} \right)^2 \right\}} \ ,$$

$$B = \sqrt{\left\{ b_m^{\circ 2} + \frac{1}{\mu^2}\left(h b_m^\circ + \frac{d b_m^\circ}{dt} \right)^2 \right\}} \ ,$$

$$A' = -\frac{1}{\mu} \,\text{arc. sen.}\, \frac{a_m^\circ}{A} \ ,$$

$$B' = -\frac{1}{\mu} \,\text{arc. sen.}\, \frac{b_m^\circ}{B} \ .$$

Portando i due ultimi valori nelle espressioni di a_m e di b_m, si ha

$$a_m = A e^{-ht} \,\text{sen.}\left(\mu t + \text{arc. sen.}\, \frac{a_m^\circ}{A} \right) \ ,$$

$$b_m = B e^{-ht} \,\text{sen.}\left(\mu t + \text{arc. sen.}\, \frac{b_m^\circ}{B} \right) \ ,$$

e quindi

$$E = \sum e^{-ht} \left[\begin{array}{l} A \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} s \,.\, \text{sen.}\left(\mu t + \text{arc. sen.}\, \frac{a_m^\circ}{A} \right) \\ + B \cos.\, m \frac{2\pi}{L} s \,.\, \text{sen.}\left(\mu t + \text{arc. sen.}\, \frac{b_m^\circ}{B} \right) \end{array} \right] ;$$

ossia, sviluppando i seni:

$$E=\sum e^{-ht}\left[\begin{array}{l} a^\circ_m \,\text{sen.}\, m\frac{2\pi}{L}s.\cos.\mu t+\sqrt{B^2-b^{\circ\,2}_m}\cos.\, m\frac{2\pi}{L}s.\,\text{sen.}\,\mu t \\ +b^\circ_m\cos.\, m\frac{2\pi}{L}s.\cos.\mu t+\sqrt{A^2-a^{\circ\,2}_m}\,\text{sen.}\, m\frac{2\pi}{L}s.\,\text{sen.}\,\mu t\end{array}\right].$$

Si ponga

$$a^\circ_m=p+q\ ,\qquad b^\circ_m=p'+q'\ ,$$
$$\sqrt{B^2-b^{\circ\,2}_m}=p-q\ ,\qquad \sqrt{A^2-a^{\circ\,2}_m}=p'-q'\ ,$$

cosicchè sia

$$p=\frac{1}{2}\left[a^\circ_m+\frac{1}{\mu}\left(hb_m^\circ+\frac{db^\circ_m}{dt}\right)\right]\ ,$$
$$q=\frac{1}{2}\left[a^\circ_m-\frac{1}{\mu}\left(hb_m^\circ+\frac{db^\circ_m}{dt}\right)\right]\ ,$$
$$p'=\frac{1}{2}\left[b^\circ_m+\frac{1}{\mu}\left(ha^\circ_m+\frac{da^\circ_m}{dt}\right)\right]\ ,$$
$$q'=\frac{1}{2}\left[b^\circ_m-\frac{1}{\mu}\left(ha^\circ_m+\frac{da^\circ_m}{dt}\right)\right]\ ;$$

e si ottiene così l'espressione

$$E=\sum e^{-ht}\left[q\,\text{sen.}\left(m\frac{2\pi}{L}s-\mu t\right)+p'\cos.\left(m\frac{2\pi}{L}s-\mu t\right)\right]$$
$$+\sum e^{-ht}\left[p\,\text{sen.}\left(m\frac{2\pi}{L}s+\mu t\right)+q'\cos.\left(m\frac{2\pi}{L}s+\mu t\right)\right],$$

la quale si può anche scrivere

$$(30)\left\{\begin{array}{l} E=\sum\sqrt{p'^2+q^2}\,e^{-ht}\,\text{sen.}\left(m\frac{2\pi}{L}s-\mu t+\text{arc. tang.}\frac{p'}{q}\right) \\ \quad+\sum\sqrt{p^2+q'^2}\,e^{-ht}\,\text{sen.}\left(m\frac{2\pi}{L}s+\mu t+\text{arc. tang.}\frac{q'}{p}\right)\end{array}\right..$$

33. Nella stessa maniera si trova

$$(31)\left\{\begin{aligned} i = & \sum\sqrt{P'^2+Q^2}\,.\,e^{-ht}\,\mathrm{sen.}\left(m\frac{2\pi}{L}s-\mu t+\mathrm{arc.\,tang.}\frac{P'}{Q}\right) \\ & +\sum\sqrt{P^2+Q'^2}\,.\,e^{-ht}\,\mathrm{sen.}\left(m\frac{2\pi}{L}s+\mu t+\mathrm{arc.\,tang.}\frac{Q'}{P}\right) \end{aligned}\right\},$$

ove P, Q, P', Q', hanno i valori

$$P = -\frac{L}{8m\pi}\left\{\frac{db^{\circ}_m}{dt}+\frac{1}{\mu}\left((\mu^2+h^2)\,a^{\circ}_m+h\frac{da^{\circ}_m}{dt}\right)\right\},$$

$$Q = -\frac{L}{8m\pi}\left\{\frac{db^{\circ}_m}{dt}-\frac{1}{\mu}\left((\mu^2+h^2)\,a^{\circ}_m+h\frac{da^{\circ}_m}{dt}\right)\right\},$$

$$P' = +\frac{L}{8m\pi}\left\{\frac{da^{\circ}_m}{dt}+\frac{1}{\mu}\left((\mu^2+h^2)\,b^{\circ}_m+h\frac{db^{\circ}_m}{dt}\right)\right\},$$

$$Q' = +\frac{L}{8m\pi}\left\{\frac{da^{\circ}_m}{dt}-\frac{1}{\mu}\left((\mu^2+h^2)\,b^{\circ}_m+h\frac{db^{\circ}_m}{dt}\right)\right\}.$$

34. Vediamo che cosa significhino le formole (30) e (31). Entrambe le espressioni constano di due somme di un'infinità di termini; da ciascuna di queste somme noi isoleremo il termine corrispondente ad un determinato valore di m, e denoteremo con E_m, i_m quello che diventano E ed i quando si ommettano tutti gli altri termini. Abbiamo per $m=1$:

$$\begin{aligned} E_1 = & \sqrt{p'^2+q^2}\,.\,e^{-ht}\,\mathrm{sen.}\left(\frac{2\pi}{L}s-\mu t+\mathrm{arc.\,tg.}\frac{p'}{q}\right) \\ & +\sqrt{p^2+q'^2}\,.\,e^{-ht}\,\mathrm{sen.}\left(\frac{2\pi}{L}s+\mu t+\mathrm{arc.\,tg.}\frac{q'}{p}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 = & \sqrt{P'^2+Q^2}\,.\,e^{-ht}\,\mathrm{sen.}\left(\frac{2\pi}{L}s-\mu t+\mathrm{arc.\,tg.}\frac{P'}{Q}\right) \\ & +\sqrt{P^2+Q'^2}\,.\,e^{-ht}\,\mathrm{sen.}\left(\frac{2\pi}{L}s+\mu t+\mathrm{arc.\,tg.}\frac{Q'}{P}\right). \end{aligned}$$

Se si fa $t=\frac{1}{\mu}\,\mathrm{arc.\,tg.}\frac{p'}{q}$, il primo termine di E_1 diventa

l'ordinata di una sinusoide, che taglia l'asse delle ascisse nei punti corrispondenti ad $s=0$, $s=\frac{L}{2}$, $s=L$; questa sinusoide si trasporta con velocità uniforme lungo l'asse delle ascisse e nel senso delle s positive, crescendo il tempo t. Quel primo termine adunque dice, che nell' istante corrispondente a $t=\frac{1}{\mu}\,\text{arc. tg.}\,\frac{p'}{q}$ la prima metà del conduttore è carica di elettricità positiva, la seconda di elettricità negativa, e che questi stati elettrici si trasportano lungo il conduttore nel senso delle s positive con una velocità costante. Noi diremo, che v'hanno *due onde*, l'una positiva e l'altra negativa, che insieme abbracciano tutta la lunghezza del conduttore, e che si propagano *in avanti* con velocità uniforme. Il secondo termine di E, dà similmente un'onda *positiva*, che alla fine del tempo $t=-\frac{1}{\mu}\,\text{arc. tg.}\,\frac{q'}{p}$ si estende da $s=0$ ad $s=\frac{L}{2}$, ed un'onda *negativa*, che nel medesimo istante si estende da $s=\frac{L}{2}$ ad $s=L$, le quali così abbracciano insieme tutto il conduttore, e che si propagano nel senso delle s negative, ossia, come diremo per brevità, *in dietro*. Analoga discussione si faccia per i_1.

Per $m=2$ si ha:

$$E_2=\sqrt{p'^2+q^2}\,.\,e^{-ht}\,\text{sen.}\left(2\cdot\frac{2\pi}{L}s-\mu\,t+\text{arc. tg.}\,\frac{p'}{q}\right)$$

$$+\sqrt{p^2+q'^2}\,.\,e^{-ht}\,\text{sen.}\left(2\cdot\frac{2\pi}{L}s+\mu\,t+\text{arc. tg.}\,\frac{q'}{p}\right)\;;$$

$$i_2=\sqrt{P'^2+Q^2}\,.\,e^{-ht}\,\text{sen.}\left(2\cdot\frac{2\pi}{L}s-\mu\,t+\text{arc. tg.}\,\frac{P'}{Q}\right)$$

$$+\sqrt{P^2+Q'^2}\,.\,e^{-ht}\,\text{sen.}\left(2\cdot\frac{2\pi}{L}s+\mu\,t+\text{arc. tg.}\,\frac{Q'}{P}\right)\,.$$

Il primo termine di E_2 dà un sistema di quattro onde, di cui la prima, che è ***positiva***, abbraccia alla fine del tempo

$$t=\frac{1}{\mu}\text{ arc. tg. }\frac{p'}{q}$$

la prima quarta parte del conduttore; la seconda, che è ***negativa***, abbraccia il secondo quarto; la terza, ***positiva***, si estende sul terzo quarto, e la quarta, ***negativa***, sull'ultimo quarto del filo. E questo sistema di onde si propaga ***in avanti***. Il secondo termine dà invece un sistema di quattro onde propagantisi ***in dietro***, che alla fine del tempo

$$t=-\frac{1}{\mu}\text{ arc. tg. }\frac{q'}{p}$$

dividono in 4 parti uguali la lunghezza del conduttore. E lo stesso dicasi di i_2. In modo analogo E_3 ed i_3 darebbero ciascuna due sistemi di 6 onde propagantisi l'uno in un senso e l'altro nel senso opposto; ed in generale i termini E_m di E ed i_m di i rappresenterebbero due sistemi di $2m$ onde ciascuno, abbraccianti ciascuno tutta la lunghezza del conduttore e propagantisi in versi opposti.

Talchè possiamo enunciare i fenomeni che avvengono in un conduttore, quando dopo di avervi rotto l'equilibrio elettrico lo si lasci a sè, dicendo che si genera una *serie* di sistemi d'onde che si propagano in un senso, ed una *serie* di sistemi d'onde che si propagano in senso opposto; che in ciascun sistema d'onde le onde successive sono alternativamente positive e negative, ed abbracciano tutte insieme l'intiera lunghezza del conduttore, e che ciascun'onda semplice abbraccia la metà del filo nel 1° sistema, il 4° nel secondo sistema, il sesto nel terzo, e così di seguito.

35. In tutto ciò v'ha analogia tra la propagazione dell'elettricità e la propagazione del suono ne'tubi e nelle aste elastiche.

Ma se, come al § VIII, non si considera la propagazione del suono che nel caso teorico, in cui non v'abbia perdita di lavoro nè per la non perfetta elasticità, nè per attrito, nè per trasmissione di calore attraverso le pareti del tubo, vi hanno fra i due ordini di fenomeni differenze capitali. Nella propagazione del suono, le onde non si modificano propagandosi, e segnatamente la loro ampiezza si mantiene costante; le onde semplici si propagano tutte colla stessa velocità, talchè tutte quelle che si propagano in un senso, si compongono in un'unica onda risultante, che si propaga del pari senza alterarsi e colla stessa velocità delle onde componenti. Nella propagazione dell'elettricità avviene il contrario; l'ampiezza delle onde decresce col tempo, e, quel che è più, ciascun'onda semplice ha una velocità propria. Le infinite onde semplici propagantisi con velocità tutte diverse non possono quindi più comporsi in un'onda unica invariabile nella forma e propagantesi con una velocità determinabile. *Non v'hanno* adunque *nella trasmissione dell'elettricità onde nello stretto senso della parola*, e questo vocabolo non deve aver servito a noi che per enunciare il fenomeno. L'analogia ricomparirebbe in parte, se si considerasse la propagazione del suono in tubi di piccolo diametro, dacchè le esperienze del Kundt e le analisi dell'Helmholtz e del Kirchhoff hanno dimostrato, che in questo caso le onde si estinguono prontamente, e che la velocità del suono dipende dalla lunghezza d'onda.

36. La diminuzione di ampiezza che abbiam detto aver luogo col tempo, è dovuta al fattore comune a tutti i termini di E e di i

$$e^{-ht} \quad \text{ossia} \quad e^{-\frac{c^2 r}{32\gamma L}t} \quad ,$$

che possiamo denominare *coefficiente di estinzione.* Quindi essa è *tanto maggiore* quanto maggiore è la resistenza r del conduttore; e *nei limiti entro cui si può ammettere che sullo stato*

elettrico di ciascun punto del filo non abbiano influenza che i punti a quello infinitamente vicini, sulla quale ipotesi sono fondati tutti i calcoli precedenti, essa è indipendente dal numero d'ordine m del termine che si considera.

37. La velocità di propagazione di una qualunque delle onde semplici vale l'aumento o la diminuzione da darsi ad s nel termine di (30) o (31) corrispondente a quell'onda, acciocchè, aumentando di 1 il tempo t, l'arco sotto il segno *sen.* rimanga invariato, è cioè:

$$V = \frac{L\mu}{2\pi m},$$

ossia, mettendo per μ il suo valore (29) e ricordando il valore (24) di h:

$$V = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2 m^2}\left(\frac{cr\sqrt{2}}{32\gamma}\right)^2} .$$

Questa velocità adunque cresce con m. La differenza però tra i valori di V corrispondenti a due valori diversi dati ad m è tanto minore, quanto maggiore è il valore di $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$. Facendo convergere $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ verso l'infinito, tutte quelle velocità convergono verso un valore comune, e precisamente verso il limite

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = 310738 \, . \, 10^6 \, \frac{\text{millimetro}}{\text{secondo}} .$$

Al limite tutte le onde semplici avendo la stessa velocità, si comporrebbero in un'unica onda risultante propagantesi colla stessa velocità. Ricadiamo così sulle conclusioni a cui siamo arrivati direttamente più sopra.

Per valori finiti di $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$, ma sufficientemente grandi, questo si può considerare come vero approssimativamente per grandi

valori di m. Ma diminuendo m sotto un certo limite, l'onda si fa confusa sempre più. Anzi seguitando a far decrescere m, si arriverà, in molti casi, ad un punto in cui V diventerà immaginario; e questo punto si raggiungerà tanto più presto quanto maggiore è h, quanto maggiore, cioè, è a parità delle altre circostanze, la resistenza r del conduttore. Allora la propagazione dell'elettricità non può più farsi colle leggi espresse dalle formole (30) e (31), ed in queste le somme debbono soltanto estendersi tra

$$m = \frac{c}{\sqrt{2}}\,\frac{r}{32\gamma\pi} \quad \text{ed} \quad m = \infty \ .$$

XI.

3° Caso. $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ *è finito*, λ_1 *e* λ_2 *sono reali.*

38. La velocità di propagazione V diventa immaginaria appunto quando cessano d'essere immaginari i valori di λ_1 e λ_2. In tal caso le espressioni di a_m e b_m non possono più mettersi sotto la forma trigonometrica, e si debbono ritenere sotto la forma (23').

Limitiamoci ancora a considerare il caso di un conduttore formante da sè un circuito chiuso. E ed i dovranno essere funzioni periodiche di s; epperò dovremo, come sopra, porre $n = 2m$.

Ponendo

$$\mu' = \sqrt{h^2 - \frac{2c^2m^2\pi^2}{L^2}} \ ,$$

cosicchè μ' sia una quantità reale, le (23') si possono scrivere

$$a_m = A\,e^{-ht}\left(e^{\mu'(t-A')} - e^{-\mu'(t-A')}\right) \ ,$$
$$b_m = B\,e^{-ht}\left(e^{\mu'(t-B')} - e^{-\mu'(t-B')}\right) \ ,$$

dove A, B, A', B' sono costanti arbitrarie, i cui valori si determinano mediante i valori iniziali dati di a_m, b_m, $\frac{d a_m}{dt}$, $\frac{d b_m}{dt}$. Se questi sono ancora a°_m, b°_m, $\frac{d a^\circ_m}{dt}$, $\frac{d b^\circ_m}{dt}$, dev'essere

$$A e^{-\mu' A'} = \frac{1}{2\mu'}\left((h+\mu')\, a^\circ_m + \frac{d a^\circ_m}{dt}\right) ,$$

$$A e^{+\mu' A'} = \frac{1}{2\mu'}\left((h-\mu')\, a^\circ_m + \frac{d a^\circ_m}{dt}\right) ,$$

$$B e^{-\mu' B'} = \frac{1}{2\mu'}\left((h+\mu')\, b^\circ_m + \frac{d b^\circ_m}{dt}\right) ,$$

$$B e^{+\mu' B'} = \frac{1}{2\mu'}\left((h-\mu')\, b^\circ_m + \frac{d b^\circ_m}{dt}\right) ;$$

e quindi

$$(32) \ldots \left\{ \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\mu'}\left[\begin{aligned} &\left((h+\mu')\, a^\circ_m + \frac{d a^\circ_m}{dt}\right) e^{-(h-\mu')t} \\ -&\left((h-\mu')\, a^\circ_m + \frac{d a^\circ_m}{dt}\right) e^{-(h+\mu')t} \end{aligned} \right] ; \\ b_m &= \frac{1}{2\mu'}\left[\begin{aligned} &\left((h+\mu')\, b^\circ_m + \frac{d b^\circ_m}{dt}\right) e^{-(h-\mu')t} \\ -&\left((h-\mu')\, b^\circ_m + \frac{d b^\circ_m}{dt}\right) e^{-(h+\mu')t} \end{aligned} \right] . \end{aligned} \right.$$

Si portino questi valori nelle equazioni:

$$(33) \ldots \left\{ \begin{aligned} E &= \sum \left(a_m \operatorname{sen.} m \frac{2\pi}{L} s + b_m \cos. m \frac{2\pi}{L} s \right) , \\ i &= -\frac{L}{4\pi} \sum \frac{1}{m} \left(\frac{d b_m}{dt} \operatorname{sen.} m \frac{2\pi}{L} s - \frac{d a_m}{dt} \cos. m \frac{2\pi}{L} s \right) , \end{aligned} \right.$$

e si avranno le leggi della distribuzione dell'elettricità libera e delle correnti pel caso che noi consideriamo.

39. Qui, come nel precedente §, si è supposto che i valori

iniziali di E e di i fossero tali, che fosse $b_0^{\,0}=0$ ed $f_0^{\,0}=0$. Se ciò non fosse, si dovrebbe porre nelle equazioni generali (25) non più $\alpha=\beta=0$, ma $\alpha=\frac{1}{2}b_0^{\,0}$, $\beta=f_0^{\,0}$. Tutta la modificazione da apportarsi alle formole (30) e (31) ed alle (33), consisterebbe nell'aggiungere, tanto in quelle quanto in queste, alle espressioni di E il termine $\frac{1}{2}b_0^{\,0}$, ed alle espressioni di i il termine $\frac{1}{2}f_0^{\,0}e^{-2ht}$.

40. Questi termini comuni ai valori che si hanno per E e per i nel caso di λ_1 e λ_2 reali, ed a quelli che si hanno pel caso di λ_1 e λ_2 immaginari, possono esistere soli.

Se è dato

$$E_{t=0}=\frac{1}{2}b_0^{\,0}=E_0\,,\quad i_{t=0}=\frac{1}{2}f_0^{\,0}=i_0\,,$$

si ha così:

$$E=E_0\,,\qquad\qquad i=i_0e^{-2ht}\,;$$

e queste formole dimostrano, che se il conduttore è inizialmente ugualmente elettrizzato in tutti i suoi punti, questo stato elettrico si conserva costante; il che è evidente di per sè; e che *se inizialmente il conduttore è percorso da una corrente uguale in tutti i suoi punti, questa corrente non cessa istantaneamente al cessare delle cause, che l'avevano prodotta, ma decresce in progressione geometrica, mentre il tempo cresce in progressione aritmetica.*

La quantità di elettricità trasmessa nel tempuscolo dt successivo all'istante t è $i_0e^{-2ht}dt$; epperò dall'istante $t=0$, in cui cessano di agire le cause, che avevano prodotto la corrente, fino alla completa estinzione di questa, passa ancora pel conduttore la quantità di elettricità

$$i_0\int_0^{\infty}e^{-2ht}dt=\frac{1}{2h}i_0\,.$$

L'equazione $e^{-2ht}=\frac{1}{2}$ dà il tempo t necessario perchè l'intensità della corrente si riduca alla metà del suo valor primitivo, il qual tempo è perciò

$$t=\frac{1}{2h}\log. \text{nat.}\, 2\ (^*)\ .$$

(*) Prendiamo come esempio un filo di rame identico al campione di Jacobi. Si ha per questo: $L=7^{m}, 620$, $\alpha=0^{mm}, 333$, epperò in numero rotondo: $\gamma=10$. La sua resistenza è, secondo Weber, di 598.10^7 unità elettromagnetiche, quando si prendano per unità di lunghezza e di tempo il millimetro ed il secondo. Moltiplicando questo numero per $\frac{8}{c^2}$, ove c è espresso nelle medesime unità, si ha la resistenza in unità meccaniche nel numero

$$r=2,482.10^{-13}\ ,$$

onde

$$2h=39401\ .$$

Questo filo sia percorso inizialmente da una corrente capace di scomporre un milligrammo d'acqua in un minuto primo; siccome secondo le esperienze di Kohlrausch e Weber, a scomporre un milligrammo d'acqua in un minuto secondo occorre una corrente di intensità uguale a $106\,^2/_3$ unità elettromagnetiche, e siccome, secondo i medesimi sperimentatori, l'unità elettromagnetica di intensità vale 155370.10^6 unità meccaniche, si ottiene pell'intensità che noi abbiamo assunto come esempio:

$$i_0=276212.10^6\ .$$

Per questo filo adunque e per questa corrente si avrebbe che dopo che sono cessate le cause, che producevano la corrente, passerebbe ancora lungo il filo il numero 7010400 di unità elettrostatiche di elettricità positiva, e la metà di questa quantità di elettricità sarebbe trasmessa in 0,0000176 minuti secondi.

XII.

4° Caso. $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ *è infinitamente piccolo.* *Applicazione ad un filo continuo.*

41. Vediamo finalmente verso qual limite convergano i valori di E e di i mentre la resistenza del conduttore, tutte le altre circostanze stando le stesse, cresce all'infinito.

Se $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ è infinitamente piccolo, h è infinitamente grande, ed, avuto riguardo al valore di μ', i secondi termini delle espressioni (32) scompaiono a fronte dei primi per tutti i valori finiti di t. I valori di a_m e di b_m si riducono così, crescendo t, in breve ad

$$a_m = \frac{1}{2\mu'}\left[(h+\mu')a^\circ_m + \frac{d\,a^\circ_m}{dt}\right]e^{-(h-\mu')t},$$

$$b_m = \frac{1}{2\mu'}\left[(h+\mu')b^\circ_m + \frac{d\,b^\circ_m}{dt}\right]e^{-(h-\mu')t},$$

ed introdotti nelle espressioni (33) di E e di i, le trasformano nelle

$$E = \sum \frac{1}{2\mu'}\left[\begin{array}{c}\left((h+\mu')\,a^\circ_m + \frac{d\,a^\circ_m}{dt}\right)\text{sen.}\, m\,\frac{2\pi}{L}\,s \\ +\left((h+\mu')\,b^\circ_m + \frac{d\,b^\circ_m}{dt}\right)\cos.\, m\,\frac{2\pi}{L}\,s\end{array}\right]e^{-(h-\mu')t},$$

$$i = \frac{L}{8\pi}\sum \frac{h-\mu'}{\mu' m}\left[\begin{array}{c}\left((h+\mu')\,b^\circ_m + \frac{d b^\circ_m}{dt}\right)\text{sen.}\, m\,\frac{2\pi}{L}\,s \\ -\left((h+\mu')\,a^\circ_m + \frac{d a^\circ_m}{dt}\right)\cos.\, m\,\frac{2\pi}{L}\,s\end{array}\right]e^{-(h-\mu')t}.$$

Ora si ha

$$\mu' = \sqrt{h^2 - \frac{2\,c^2\,m^2\,\pi^2}{L^2}}\ ,$$

e nel nostro caso, essendo h infinitamente grande, si può scrivere

$$\mu' = h\left(1 - (32)^2\,\frac{m^2\,\pi^2\,\gamma^2}{c^2\,r^2}\right)\ ,$$

donde

$$h - \mu' = \frac{32\,\gamma\,m^2\,\pi^2}{r\,L}\ .$$

Perciò la quantità

$$\frac{h-\mu'}{m^2} = \frac{32\,\gamma\,\pi^2}{r\,L}$$

è indipendente da m, e per conseguenza i precedenti valori di E e di i soddisfanno alle equazioni

$$(34)\ldots\qquad \left\{\begin{aligned} i &= -\frac{h-\mu'}{m^2}\,\frac{L^2}{8\,\pi^2}\,\frac{dE}{ds}\ , \\ \frac{di}{ds} &= -\frac{1}{2}\,\frac{dE}{dt}\ . \end{aligned}\right.$$

Tra queste eliminando i e ponendo per $\frac{h-\mu'}{m^2}$ il suo valore, si ottiene l'equazione alle derivate parziali

$$(35)\ldots\qquad \frac{dE}{dt} = 8\,\frac{\gamma\,L}{r}\,\frac{d^2E}{ds^2}\ ,$$

la quale è della stessa forma di quella, che dà la propagazione del calore nei corpi solidi.

Dunque *nel caso considerato l'elettricità si propaga colle stesse leggi, con cui si trasmette il calore per conduzione.*

XIII.

Applicazione ad un conduttore, i cui due capi sono separati.

42. La stessa analogia colla propagazione del calore si trova considerando un filo non ritornante in sè stesso.

Abbiasi, per esempio, come al § IX, un filo di lunghezza L, che ad un estremo, che noi prendiamo per origine delle s, sia posto in perfetta comunicazione col terreno, e di cui l'altro estremo venga congiunto, nell'istante $t=0$, col polo positivo di una pila, della quale l'altro polo comunichi col suolo; e supponiamo qui, come al § IX, che la resistenza della pila sia trascurabile a fronte di quella del conduttore, che si considera.

Se diciamo K la forza elettromotrice della pila, le condizioni, a cui debbono soddisfare E ed i, sono che

$$[A]\ldots\left\{\begin{array}{llll} \text{per} & s=0 & \text{sia } E=0 & \text{qualunque sia } t \\ \text{»} & s=L & \text{» } E=\dfrac{K}{4\gamma} & \text{»} \\ \text{»} & t=0 & \text{» } E=0 & \text{qualunque sia } s \\ \text{»} & t=0 & \text{» } i=0 & \text{»} \end{array}\right. .$$

Perchè le espressioni (25) soddisfacciano alla prima ed alla seconda di queste condizioni, dev'essere

$$a=C_1'=C_2'=0\ ,\quad b=\frac{K}{4\gamma L}\ ;$$

in grazia della nota relazione

$$x=-2\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen.}\,n\frac{\pi}{L}x\ ,$$

la 3ª condizione dà

$$C_1 + C_2 = 2(-1)^n \frac{1}{n} \frac{K}{4\gamma\pi} \ ,$$

e perchè sia soddisfatta l'ultima condizione, si deve avere

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0 \ .$$

Dalle due ultime equazioni ricavasi

$$C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 2 \frac{(-1)^n}{n} \frac{K}{4\gamma\pi} \ ,$$

$$C_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} C_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 2 \frac{(-1)^n}{n} \frac{K}{4\gamma\pi} \ ,$$

onde sostituendo nei valori (25) di E e di i:

$$E = \frac{K}{4\gamma}\left[\frac{s}{L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}\right)\text{sen.}\, n\frac{\pi}{L}s\right],$$

$$i = -\frac{K}{r}(1 - e^{-2ht})$$

$$-\frac{KL}{4\gamma\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\lambda_2\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}(1 - e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t})\cos.\, n\frac{\pi}{L}s.$$

Se ora noi supponiamo che sia $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$ infinitamente piccolo, abbiamo, trascurandone le potenze superiori:

$$\lambda_1 = \frac{c^2 r}{16\gamma L} \ , \qquad \lambda_2 = \frac{8\gamma n^2 \pi^2}{rL} \ ;$$

onde risulta $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ infinitamente piccolo di secondo ordine e $\lambda_1 - \lambda_2$ infinitamente grande; invece di $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ si può porre l'unità, e se non si considera la trasmissione che dopo che t ha

assunto un valore finito, si possono trascurare e^{-2ht} ed $e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}$. Ponendo per λ_2 il suo valore, e dicendo R la resistenza riferita all'unità di lunghezza ed all'unità di sezione, ed ω la sezione del conduttore, cosicchè sia $r=R\frac{L}{\omega}$, le espressioni di E e di i si riducono alle

$$(36)\ldots E=\frac{K}{4\gamma}\left[\frac{s}{L}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen.}\,n\frac{\pi}{L}s\cdot e^{-\frac{8\gamma n^2\pi^2\omega}{RL^2}t}\right],$$

$$(37)\ldots\ i=-\frac{K\omega}{RL}\left[1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\cos.\,n\frac{\pi}{L}s\cdot e^{-\frac{8\gamma n^2\pi^2\omega}{RL^2}t}\right],$$

valevoli per tutti i valori di t diversi da zero.

Queste espressioni soddisfanno alle equazioni differenziali;

$$i=-4\gamma\frac{L}{r}\frac{dE}{ds},$$

$$\frac{di}{ds}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dE}{dt},$$

che dànno coll'eliminazione di i:

$$\frac{dE}{dt}=8\gamma\frac{L}{r}\frac{d^2E}{ds^2},$$

equazione della forma di quella da cui dipende la propagazione del calore nei corpi solidi.

43. Se, stando tutte le altre circostanze le stesse, si hanno due conduttori diversi, per il primo dei quali la lunghezza, la sezione, la resistenza unitaria ed il valore di log. $\frac{L}{\alpha}$ sieno L, ω, R, γ, e pel secondo L', ω', R', γ', se si considera sul primo conduttore un punto determinato dalla distanza s dall'origine, e se si prende sul secondo conduttore il punto s' per cui si abbia

$$\frac{s'}{L'}=\frac{s}{L},$$

in quei due punti si avranno cariche elettriche ed intensità, che varranno una stessa frazione della carica e dell' intensità finale, tutte le volte che sarà:

$$\frac{8\gamma'\omega'}{R'L'^2}t' = \frac{8\gamma\omega}{RL^2}t \; .$$

Il tempo necessario perchè all'estremità del conduttore, che comunica a terra si produca un'intensità, i cui valori sieno una data frazione dei valori finali, dicesi *durata relativa della carica.* L'ultima eguaglianza dimostra che questo tempo è proporzionale inversamente alla sezione ω, e direttamente alla resistenza unitaria R, al quadrato della lunghezza L e ad un coefficiente

$$2q = \frac{1}{\gamma} \; .$$

Lo stesso avviene della *durata assoluta della carica,* cioè del tempo che passa tra l'istante in cui si chiude il circuito, e quello in cui all'estremità opposta a quella congiunta colla pila si produce una carica ed una intensità di corrente di dato valore assoluto, purchè, pei due conduttori, q ed r abbiano lo stesso valore.

44. Si è trovato

$$\Omega = 2E\gamma \; ,$$

e di qui si ricava

$$q = \frac{1}{2\gamma} = \frac{E}{\Omega} \; ;$$

cosicchè q rappresenta la quantità di elettricità libera, riferita all'unità di lunghezza, che si deve avere in un punto qualunque del conduttore, acciocchè il valore del potenziale Ω per quel punto sia uguale all'unità.

E questa quantità è quella che Thomson denominò *coefficiente di carica*, oppure *capacità elettrostatica.*

Nello stabilire le equazioni generali noi non abbiamo tenuto conto delle azioni esterne esercitate dall' elettricità libera del conduttore, epperò abbiamo trovato che q non dipende che dalle dimensioni del medesimo. Queste azioni però sono inevitabili, e la loro influenza può essere notevolissima. Se per esempio, come accade nei conduttori telegrafici sotterranei o sottomarini, il filo metallico è coperto di un involucro isolante, poi di un inviluppo metallico ed immerso così in un mezzo relativamente conduttore, come è l'acqua salsa, com'è la terra umida, esso si carica come un condensatore elettrico, e la quantità di elettricità necessaria a produrre il potenziale uno è maggiore di quella che corrisponderebbe allo stesso filo quando questo fosse scoperto. Il valore, che in questo caso prende il coefficiente di carica q, dipende dalle dimensioni del filo metallico e dell'involucro isolante e dalla natura di questo. La nostra teoria non basta evidentemente a determinarlo, ma è chiaro ch'esso sarà maggiore che per un filo scoperto (*).

45. Tutte queste leggi sono state dimostrate pel caso in cui la resistenza del circuito sia grandissima, talchè valgano le (34).

(*) Se R è il raggio del filo metallico, R' il raggio della superficie cilindrica, che limita esternamente l'involucro isolante, si ha, secondo Thomson, quando il filo e l'involucro sono concentrici

$$q = \frac{K}{8 \log \frac{R'}{R}},$$

e quando sono eccentrici, detta r la distanza dei due assi:

$$q = \frac{K}{8 \log . \frac{R'^2 - r^2}{R R'}},$$

ove K è una costante, che dipende dalla materia di cui è formato l'involucro, ed è circa 2 pella guttaperca.

Nelle formole di Thomson invece del coefficiente numerico 8 si ha il coefficiente 2; ciò dipende dalle unità scelte per misurare le intensità e le resistenze.

Siccome queste si ricavano dalle (18′) e (19′) sopprimendo soltanto il termine in $\frac{1}{c^2}$, possiamo anche dire, che esse son vere in tutti quei casi, in cui la propagazione dell'elettricità si fa così lentamente da potersi trascurare l'effetto dell'induzione. Gaugain, com'è noto, le ha ritrovate tutte sperimentalmente, operando su cattivissimi conduttori.

Ma sarà egli anche possibile trovarle verificate per conduttori metallici? Facciamo un esempio numerico. Sia un filo di rame della lunghezza di 1000 chilometri e del diametro di $0^{mm},666...$, uguale cioè al diametro del campione di Jacobi. Per questo filo è $\gamma=21,822$, $r=0,3257.10^{-7}$, epperò

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}=0,034 \;.$$

Questo valore è abbastanza piccolo a fronte dell'unità, perchè per valori di n non grandissimi, epperò pei primi termini, che sono i più influenti, delle serie che dànno E ed i, esso si possa trascurare ed avere tuttavia risultati prossimi ai veri. Dobbiamo perciò prevedere che quelle leggi saranno per fili di grande lunghezza (e tanto più pei conduttori sottomarini, ove ad $\frac{1}{2\gamma}$ devesi sostituire un numero maggiore) prossimamente verificate.

Ma poichè, per quanto la quantità $\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}$ sia piccola, finchè essa è finita, il suo prodotto per n, crescendo questo numero, finirà per diventare prossimo all'unità e poi per superarla, dobbiamo conchiudere, che benchè la massima parte dell'elettricità si trasmetta ne'conduttori di grande resistenza secondo quelle leggi, ve ne saranno tuttavia sempre altre parti, che si propagheranno con leggi diverse da quelle e fra di loro. Si rifletta ora a ciò che deve risultare da una tale mescolanza di movimenti elettrici, i quali sono soggetti a leggi affatto diverse;

si consideri, che noi abbiamo sempre fatto astrazione da un elemento perturbatore, nella pratica inevitabile, cioè dalla dispersione dell'elettricità alla superficie del conduttore, e si capirà come le più accurate esperienze abbiano potuto rivelare notevoli divergenze dalle leggi enunciate.

XIV.

Equazioni generali per un conduttore lineare di forma qualunque.

46. Le espressioni (17) di Ω e di U non sono valevoli che nei casi in cui due punti del filo non possono essere l'uno all'altro infinitamente vicini, se non è infinitamente piccolo l'arco fra loro compreso; e le equazioni (18) e (19) con tutte le loro conseguenze, delle quali si è discorso fin qui, non possono rappresentare approssimativamente i fenomeni per un conduttore dato di dimensioni finite, se questo è così fatto, che alcune sue parti si trovino abbastanza vicine ad altre non contigue, perchè vi possano esercitare attrazioni elettrostatiche e fenomeni d'induzione sensibili. Per tutti questi casi è necessario ricorrere alle equazioni generali (7), (9) e (10), o più semplicemente, se si suppone ancora che il filo abbia una sezione infinitamente piccola, alla prima delle (7), portando in questa per Ω ed U i valori (16).

L'equazione generale, alla quale si arriva in questo modo, si semplifica notevolmente per un caso speciale frequentissimo, quello del circolo; e l'esame di questo caso, che dopo quanto si è detto finora, si potrà fare in poche parole, basterà a mostrarci quanta influenza possa esercitare sulle leggi della propagazione dell'elettricità la forma della curva, su cui è disposto il filo.

47. Riprendiamo le equazioni (16) e (16'):

$$\Omega = 2\,E \log.\frac{l}{\alpha} + \int \frac{E' d s'}{r} \;,$$

$$U = 2\;i \log.\frac{l}{\alpha} + \int i' \frac{d s'}{r} \cos.(r, ds) \cos.(r, ds') \;.$$

Supponendo che il conduttore formi da sè un circuito chiuso, E ed i debbono essere funzioni periodiche di periodo L, e le possiamo mettere, come al § X, sotto la forma

$$E = \sum_{m=0}^{\infty} \left(a_m \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} s + b_m \cos.\, m \frac{2\pi}{L} s \right) \;,$$

$$i = -\frac{L}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{d b_m}{d t} \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} s - \frac{d a_m}{d t} \cos.\, m \frac{2\pi}{L} s \right) \;.$$

Portiamo questi valori in Ω ed in U, e facciamo $s' = s + \sigma$; otteniamo così:

$$\Omega = 2 \log.\frac{l}{\alpha} \sum \left(a_m \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} s + b_m \cos.\, m \frac{2\pi}{L} s \right)$$

$$+ \sum \int \frac{d\sigma}{r} \left[a_m \,\text{sen.} \left(m \frac{2\pi}{L} s + m \frac{2\pi}{L} \sigma \right) + b_m \cos. \left(m \frac{2\pi}{L} s + m \frac{2\pi}{L} \sigma \right) \right],$$

$$U = -2 \log.\frac{l}{\alpha} \frac{L}{4\pi} \sum \frac{1}{m} \left(\frac{d b_m}{d t} \,\text{sen.}\, m \frac{2\pi}{L} s - \frac{d a_m}{d t} \cos.\, m \frac{2\pi}{L} s \right)$$

$$- \frac{L}{4\pi} \sum \int \frac{d\sigma}{r} \cos.(r, ds) \cos.(r, ds') \cdot \frac{1}{m} \left[\begin{array}{c} \dfrac{d b_m}{d t} \,\text{sen.} \left(m \dfrac{2\pi}{L} s + m \dfrac{2\pi}{L} \sigma \right) \\ - \dfrac{d a_m}{d t} \cos. \left(m \dfrac{2\pi}{L} s + m \dfrac{2\pi}{L} \sigma \right) \end{array} \right];$$

onde, sviluppando i seni ed i coseni delle somme, e facendo

$$N=\int \frac{1}{r}\,\text{sen.}\,m\frac{2\pi}{L}\,\sigma\,d\sigma\ ,$$

$$N'=2\log.\frac{l}{\alpha}+\int \frac{1}{r}\cos.\,m\frac{2\pi}{L}\,\sigma\,d\sigma\ ,$$

$$M=\int \frac{1}{r}\cos.(r,ds)\cos.(r,ds')\,\text{sen.}\,m\frac{2\pi}{L}\,\sigma\cdot d\sigma\ ,$$

$$M'=2\log.\frac{l}{\alpha}+\int \frac{1}{r}\cos.(r,ds)\cos.(r,ds')\cos.\,m\frac{2\pi}{L}\,\sigma\cdot d\sigma\ ,$$

si ha

$$\Omega=\sum\left((a_m N'-b_m N)\,\text{sen.}\,m\frac{2\pi}{L}s+(a_m N+b_m N')\cos.\,m\frac{2\pi}{L}s\right),$$

$$U=-\frac{L}{4\pi}\sum\frac{1}{m}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{db_m}{dt}M'+\frac{da_m}{dt}M\right)\text{sen.}\,m\frac{2\pi}{L}s\\ +\left(\frac{db_m}{dt}M-\frac{da_m}{dt}M'\right)\cos.\,m\frac{2\pi}{L}s\end{array}\right].$$

Supponiamo inoltre che la forza elettromotrice F_s, sviluppata da cause esterne al conduttore, sia una funzione di s e di t rappresentata dalla serie

$$F_s=\sum\left(f_m\,\text{sen.}\,m\frac{2\pi}{L}s+g_m\cos.\,m\frac{2\pi}{L}s\right)\ ,$$

ove f_m e g_m, come le a_m e b_m, sono funzioni di t; scriviamo nella 1ª delle (7) s invece di x, moltiplichiamo i due membri di quest'equazione per $\pi\alpha^2$, poniamovi i invece di $\pi\alpha^2.u$, poi sostituiamovi ad Ω, U, F_s i valori precedenti, ed avremo l'equazione

$$\sum\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2 b_m}{dt^2}+\dfrac{c^2}{8\pi\alpha^2 kM'}\dfrac{db_m}{dt}+\dfrac{2\pi^2c^2m^2N'}{L^2M'}b_m\\+\dfrac{c^2\pi m}{2LM'}f_m+\dfrac{M}{M'}\dfrac{d^2a_m}{dt^2}+\dfrac{2\pi^2c^2m^2N}{L^2M'}a_m\end{array}\right\}\text{sen.}\, m\frac{2\pi}{L}s$$

$$=\sum\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2 a_m}{dt^2}+\dfrac{c^2}{8\pi\alpha^2 kM'}\dfrac{da_m}{dt}+\dfrac{2\pi^2c^2m^2N'}{L^2M'}a_m\\-\dfrac{c^2\pi m}{2LM'}g_m-\dfrac{M}{M'}\dfrac{d^2b_m}{dt^2}-\dfrac{2\pi^2c^2m^2N}{L^2M'}b_m\end{array}\right\}\cos.\, m\frac{2\pi}{L}s.$$

48. Le quantità, che abbiamo rappresentato con N, N', M, M' sono determinate dalla forma della curva data, e sono funzioni di s. Nel caso in cui questa curva è un circolo, e solo in questo caso, queste grandezze hanno un medesimo valore per tutti i punti del circuito.

In questo caso le quantità tra parentesi nell'equazione precedente essendo indipendenti da s, quest'equazione non può essere verificata per tutti i valori di questa variabile, se le due parentesi non sono nulle separatamente; epperò le funzioni di t rappresentate da a e b debbono soddisfare alle equazioni differenziali:

$$(38)\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2a_m}{dt^2}+\dfrac{c^2}{8\pi\alpha^2kM'}\dfrac{da_m}{dt}+\dfrac{2\pi^2c^2m^2N'}{L^2M'}a_m-\dfrac{c^2\pi m}{2LM'}g_m\\ \qquad\qquad =\dfrac{M}{M'}\dfrac{d^2b_m}{dt^2}+\dfrac{2\pi^2c^2m^2N}{L^2M'}b_m\ ,\\ \dfrac{d^2b_m}{dt^2}+\dfrac{c^2}{8\pi\alpha^2kM'}\dfrac{db_m}{dt}+\dfrac{2\pi^2c^2m^2N'}{L^2M'}b_m+\dfrac{c^2\pi m}{2LM'}f_m\\ \qquad\qquad =-\dfrac{M}{M'}\dfrac{d^2a_m}{dt^2}-\dfrac{2\pi^2c^2m^2N}{L^2M'}a_m\ .\end{array}\right.$$

49. Si dica R il raggio del circolo, e si avrà

$$L=2\pi R\,,\quad r=2R\,\text{sen.}\frac{\sigma}{2h}\,,\quad \text{angolo}\,(r,ds)=(r,ds')=\frac{\sigma}{2R}\,,$$

e quindi

$$N=\frac{1}{2R}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi R-\frac{1}{2}l}\frac{\text{sen.}\frac{m\sigma}{R}d\sigma}{\text{sen.}\frac{\sigma}{2R}}\,,\quad N'=2\log.\frac{l}{\alpha}+\frac{1}{2R}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi R-\frac{1}{2}l}\frac{\cos.\frac{m\sigma}{R}d\sigma}{\text{sen.}\frac{\sigma}{2R}}\,,$$

$$M=\frac{1}{2R}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi R-\frac{1}{2}l}\frac{\cos.^2\frac{\sigma}{2R}\,\text{sen.}\frac{m\sigma}{R}d\sigma}{\text{sen.}\frac{\sigma}{2R}}=N-\frac{1}{2R}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi R-\frac{1}{2}l}\text{sen.}\frac{m\sigma}{R}\,\text{sen.}\frac{\sigma}{2R}\,d\sigma\,,$$

$$M'=\log.\frac{l}{\alpha}+\frac{1}{2R}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi R-\frac{1}{2}l}\frac{\cos.^2\frac{\sigma}{2R}\cos.\frac{m\sigma}{R}d\sigma}{\text{sen.}\frac{\sigma}{2R}}=N'-\frac{1}{2R}\int_{\frac{1}{2}l}^{2\pi R-\frac{1}{2}l}\cos.\frac{m\sigma}{R}\,\text{sen.}\frac{\sigma}{2R}\,d\sigma.$$

Perciò facendo $\frac{\sigma}{2R}=z$, ed osservando, che

$$\frac{\text{sen.}\,2mz}{\text{sen.}\,z}=\quad 2\cos.(2m-1)z+2\cos.(2m-3)z$$
$$+\ldots+2\cos.z\,,$$
$$\frac{\cos.\,2mz}{\text{sen.}\,z}=-2\,\text{sen.}(2m-1)z-2\,\text{sen.}(2m-3)z$$
$$-\ldots-2\,\text{sen.}\,z+\frac{1}{\text{sen.}\,z}\,,$$

e che

$$\int\text{sen.}\,2mz.\text{sen.}\,z\,dz=\quad\frac{1}{2(2m-1)}\text{sen.}(2m-1)z$$
$$-\frac{1}{2(2m+1)}\text{sen.}(2m+1)z\,,$$

$$\int \cos. 2mz . \operatorname{sen}. z dz = \frac{1}{2(2m-1)} \cos. (2m-1) z - \frac{1}{2(2m+1)} \cos. (2m+1) z \ ,$$

si ricava facilmente

$$(39)\ldots \begin{cases} N = 0 \ , \\ N' = -4\left(\cos. \frac{l}{4R} + \frac{1}{3} \cos. \frac{3l}{4R} + \ldots + \frac{1}{2m-1} \cos. \frac{(2m-1)l}{4R}\right) \\ \qquad - 2 \log. \tan. \frac{l}{8R} + 2 \log. \frac{l}{\alpha} \ , \\ M = 0 \ , \\ M' = N' + \frac{1}{2m+1} \cos. (2m+1) \frac{l}{4R} \\ \qquad - \frac{1}{2m-1} \cos. (2m-1) \frac{l}{4R} \ . \end{cases}$$

La lunghezza l dell'elemento di circuito, che si considera come cilindrico, è arbitraria, e la sua scelta è solo limitata dalla condizione che tanto $\frac{\alpha}{l}$ quanto $\frac{l}{R}$ sieno infinitamente piccoli, o se si vogliono applicare le formole ad un caso pratico, che essi sieno due numeri piccolissimi. Per esempio si può porre $l = \sqrt{R\alpha}$.

In grazia dei valori (39) le due equazioni (38) si semplificano ancora, e si riducono a

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2 k M'} \frac{da_m}{dt} + \frac{2\pi^2 c^2 m^2 N'}{L^2 M'} a_m - \frac{c^2 \pi m}{2 L M'} g_m = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2 b_m}{dt^2} + \frac{c^2}{8\pi\alpha^2 k M'} \frac{db_m}{dt} + \frac{2\pi^2 c^2 m^2 N'}{L^2 M'} b_m + \frac{c^2 \pi m}{2 L M'} f_m = 0 \ ;$$

e queste, supponendo $g_m = f_m = 0$, e dicendo r la resistenza $\frac{L}{\pi\alpha^2 k}$ del circuito, si riducono alla lor volta alle

$$\frac{d^2 a_m}{dt^2} + \frac{c^2 r}{8 M' L} \frac{d a_m}{dt} + \frac{2 c^2 \pi^2 m^2}{L^2} \frac{N'}{M'} a_m = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2 b_m}{dt^2} + \frac{c^2 r}{8 M' L} \frac{d b_m}{dt} + \frac{2 c^2 \pi^2 m^2}{L^2} \frac{N'}{M'} b_m = 0 \ ,$$

le quali non differiscono dalle (23) *che per i coefficienti di* $\frac{d a_m}{dt}$ *e* $\frac{d b_m}{dt}$ *e di* a_m *e* b_m*; nel primo dei quali v'è qui* M' *al posto di* $2 \log. \frac{l}{\alpha}$, *e nel secondo v'è il fattore* $\frac{N'}{M'}$, *che in quelle non figura.*

Dunque tutte le leggi trovate per i conduttori, pei quali si può trascurare l'azione esercitata sopra ogni punto dai punti ad esso non infinitamente vicini, si ritrovano verificate ne'conduttori piegati a circolo con un raggio tale che ogni loro elemento eserciti sopra gli altri, ancorchè non attigui, un'azione sensibile, purchè ai valori (24) e (29) di h e di μ, ed al valore di μ' dato al § XI, si sostituiscano rispettivamente i valori

$$h = \frac{c^2 r}{16 M' L} \ ,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2 c^2 m^2 \pi^2}{L^2} \frac{N'}{M'} - h^2} \ , \qquad \mu' = \sqrt{h^2 - \frac{2 c^2 m^2 \pi^2}{L^2} \frac{N'}{M'}} \ .$$

50. Tra le conseguenze di queste modificazioni, questa essenzialmente dev'essere notata: che mentre in un conduttore rettilineo, o che si possa considerare come tale, tutte le onde semplici, nelle quali abbiamo immaginato scomposto il movimento dell'elettricità nel caso discusso al § X, e ciascuna delle quali è rappresentata da un termine delle somme (30) e (31), diminuiscono col tempo secondo una stessa progressione; nel caso attuale invece la diminuzione d'intensità essendo dovuta al fattore e^{-ht}, ed h dipendendo da M' e quindi da m, quella

diminuzione segue una legge diversa secondo i diversi valori di m, secondo cioè il numero d'ordine del termine che si considera, o finalmente secondo le diverse onde semplici.

Le velocità di propagazione delle onde semplici dipenderanno anch'esse dai valori di M' e di N', e quindi, ad ugual valore di $\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$, dal raggio di curvatura del conduttore; ma tutte queste velocità avranno ancora un limite comune, e questo limite sarà come prima $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

XV.

Conclusione.

51. Non è da una teoria, che riposa sopra principii provati finora sperimentalmente solo in casi speciali, in guisa che le sue formole fondamentali potrebbero non contenere tutti i termini delle formole, che esprimono le vere leggi della natura, che io mi affretterò a dedurre conseguenze; nè mi propongo di abbandonare il campo della pura fisica matematica per ricercare coll'induzione il meccanismo degli stati elettrici e delle correnti. Tuttavia, come risultante dall'insieme dei fatti esposti, e come occasione a ravvicinamenti, un'osservazione ci si presenta da sè.

Abbiamo trovato espressa la velocità-limite di propagazione delle onde elettriche, ossia quella velocità, con cui gli stati elettrici si trasmetterebbero lungo i conduttori, se fosse possibile che questi fossero privi affatto di resistenza; velocità colla quale sempre si propaga una parte dell'elettricità eccitata, qualunque sia la resistenza del circuito, e che pelle onde elettriche è un massimo assoluto, da un numero che differisce da quelli stati trovati pella velocità della luce negli spazi interstellari di una quantità molto inferiore agli errori probabili di osservazione. Questa coincidenza *non cercata* non saprebbe essere fortuita, e

sarebbe impossibile non vedervi provato come nella propagazione degli stati elettrici intervenga quel medesimo etere, al quale si attribuisce la propagazione della luce e del calore raggiante. È un'idea non nuova, e che da gran tempo ha preso posto fra le convinzioni dei fisici, ma che la sola esperienza non potrebbe confermare.

E così quell'etere, la cui esistenza è incontestabilmente dimostrata dalla propagazione della luce negli spazi planetari, e dalla spiegazione semplice e completa dei fenomeni della diffrazione nella teoria delle onde, quell'etere, che le leggi della doppia rifrazione provano con certezza esistere nell'interno dei corpi trasparenti, quell'etere la cui esistenza nell'interno dei corpi ponderabili pare oramai necessaria pella spiegazione della coesione, delle affinità chimiche e di tutte le azioni molecolari, quell'etere si presenta qui come il mezzo propagatore degli stati elettrici.

Ammesso l'etere, le leggi, a cui siamo arrivati, appaiono affatto naturali. Non vi è resistenza? Il movimento elettrico deve manifestarsi istantaneamente appena propagato lo squilibrio, che ne è la causa (§§ VII, VIII e IX); interviene la resistenza, si fa cioè sentire l'influenza della materia del conduttore? Questa deve dapprima produrre una differenza nelle velocità delle varie onde elementari (§ X), poi spegnere alcune di queste (§ XI). Al limite una minima parte dell'elettricità si propagherà per onde, e la trasmissione degli stati elettrici dovrà avvenire come quella degli altri stati che si propagano di molecola in molecola, come quella del calore per conduzione.

32. Si può dire di più. Mentre partendo dalla legge di Coulomb siamo arrivati ad una teoria delle correnti elettriche, la quale, finora almeno, non è contraddetta da nessuna esperienza positiva, non fu mai possibile, per quanto vi si sieno affaticati valenti fisici e geometri, come Weber, Kirchhoff, Helmholtz, di arrivare alle leggi note delle correnti prendendo le mosse dalla

formola, che pur parrebbe dover presiedere a questi fenomeni, dalla formola che con tanta semplicità ed eleganza dà ragione ad un tempo dei fenomeni elettrostatici, delle attrazioni elettrodinamiche, dei fenomeni di induzione, dalla formola di Weber. Non potrebbe questa impossibilità di dedurre dalla formola che dà l'attrazione o la ripulsione reciproca di due quantità di elettricità *in movimento*, le leggi delle correnti, mentre queste si derivano facilmente dalla formola che regge le azioni reciproche di due quantità di elettricità allo stato di equilibrio, essere una indicazione sulla natura dell'agente elettricità? Pare che sì, se si ricordano le esperienze di Grove e di Gassiot, che sembrano provare, che la scarica elettrica diretta non può passare nel vuoto assoluto. Finchè questi risultati non verranno contraddetti da altre esperienze, questo almeno siamo autorizzati a credere: che la trasmissione degli stati elettrici si faccia di molecola ponderabile in molecola ponderabile; che la forza elettromotrice trovi questi stati nella molecola, e ne produca la comunicazione alla molecola successiva; che (possiam dirlo come cosa che altre considerazioni hanno fatto intravedere da gran tempo) lo stato dell'atmosfera eterea di una molecola costituisca lo stato elettrico, e la trasmissione di questo stato alle molecole successive sia la corrente.

La notevole esperienza di Fizeau sull'influenza esercitata sulla velocità della luce dal movimento del mezzo ponderabile, in cui quella si propaga, l'ipotesi a cui Fresnel dovette ricorrere per ispiegare il fenomeno, secondo la quale le molecole ponderabili sarebbero attorniate da atmosfere di etere, la cui densità si sovrapporrebbe a quella dell'etere ambiente, ed il modo completo con cui il Mossotti è riuscito a spiegare col rigore dell'analisi le azioni molecolari, ammettendo che tra la materia ponderabile e l'etere operino le forze attribuite da Epino alla materia ed all'elettricità, giustificano queste idee.

53. Ma anche indipendentemente dalla considerazione delle

correnti, l'intima connessione tra i fenomeni elettrici e l'esistenza dell'etere è indicata dal semplice principio di Weber. Secondo questo principio due quantità di elettricità e, e', accumulate su due punti distanti tra loro di r, esercitano l'una sull'altra un'attrazione espressa da

$$\frac{e e'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{d r^2}{d t^2} + \frac{2 r}{c^2}\frac{d^2 r}{d t^2}\right) .$$

La costante c è quella velocità relativa delle due quantità di elettricità, per cui esse non esercitano più tra di loro alcuna azione reciproca. Kohlrausch e Weber ne determinarono il valore confrontando l'unità elettromagnetica delle intensità colla unità meccanica, e questo valore $c = 439450 . 10^6 \frac{\text{millimetro}}{\text{secondo}}$, ha tali rapporti con quelli delle costanti che si incontrano nella propagazione della luce, che il fatto non poteva sfuggire ai fisici.

Riemann pel primo ha dimostrato che si può arrivare alla formola di Weber ammettendo che le attrazioni elettriche non si trasmettano istantaneamente, ma si propaghino invece tutt'attorno del punto, da cui emanano, colla velocità $\frac{c}{\sqrt{2}}$ che è quella della luce (*). Betti recentemente ed altri partendo da altre considerazioni arrivarono allo stesso risultato.

Ammettendo come Riemann, che le azioni elettriche si trasmettano colla velocità $\frac{c}{\sqrt{2}}$, il Prof. Lorenz di Vienna ha mostrato (**) che le equazioni generalissime (7) si semplificano notevolmente.

In un'analisi delle varie teorie della dispersione della luce il sig. Ketteler prende a considerare l'influenza sulla velocità della luce, esercitata dalle molecole ponderabili ed arriva così

(*) *Puggendorffs Annalen*, vol. 131, pag. 237.
(**) Id. id. pag. 243.

ad una formola di dispersione, ch'egli dimostra abbastanza d'accordo coll'osservazione. Applicata ai gas questa formola dimostrerebbe, che la velocità di propagazione massima che può essere raggiunta da un'onda di lunghezza infinita in un gas infinitamente rarefatto è $= c$.

Cauchy ha dimostrato che dal fatto, che la velocità di propagazione del raggio ordinario nei cristalli ad un asse è costante, sembra risultare che le molecole dell'etere si respingono nella ragione inversa della sesta potenza della distanza; e Briot nella sua teoria matematica della luce, uguagliando a zero il termine che produrrebbe la dispersione nell'etere libero, arriva allo stesso risultato. Se questo fosse vero, la velocità di propagazione delle vibrazioni longitudinali sarebbe uguale a quella delle vibrazioni trasversali moltiplicata per $2\sqrt{2}$, e quindi, ricordando il valore di c, essa varrebbe $2c$.

Tutte queste relazioni si pongano a confronto col fatto della rotazione del piano di polarizzazione di un raggio di luce, che attraversa un corpo trasparente sotto l'azione di calamite temporarie ed anche di semplici eliche percorse da correnti; col fatto, scoperto da Plücker, delle attrazioni e ripulsioni diamagnetiche esercitate dai poli delle calamite sugli assi ottici dei cristalli birifrangenti; col fatto, contestato bensì, ma a difesa del quale stanno molti de'più accurati sperimentatori, dell'influenza elettromagnetica esercitata da alcune parti della radiazione solare (*); e ci si permetterà di conchiudere come conchiude il Lamè la sua teoria dell'elasticità, dicendo dell'etere: « Il n'est » donc plus possible d'arriver à une explication rationnelle et

(*) In una memoria letta nell'adunanza dell'Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, il 25 novembre 1852, il Profess. Codazza, collo scopo di vedere se questo fatto fosse possibile nell'ipotesi del Mossotti, ha dimostrato col rigore dell'analisi, che veramente in quest'ipotesi le vibrazioni longitudinali dell'etere potrebbero produrre ne'corpi, in cui queste si propagano, la polarizzazione elettrica.

» complète de la nature physique, sans faire intervenir cet
» agent, dont la présence est inévitable. On n'en saurait douter,
» cette intervention, sagement conduite, trouvera le sécret, ou
» la véritable cause des effets, qu'on attribue au calorique,
» à l'électricité, au magnétisme .... ». E quando questo secreto
sarà trovato, si potrà dire, che Kohlrausch e Weber,
misurando la costante c, hanno misurato la velocità della luce,
non servendosi d'altro, che di una bottiglia di Leyda, di una
bussola delle tangenti e di una bilancia di Coulomb.

TESI

PROPOSIZIONI DI GEOMETRIA

1.

Se per un punto della linea di contatto tra una superficie qualunque ed una superficie sviluppabile, ad essa circoscritta, si conducono la tangente alla linea di contatto e la generatrice della superficie sviluppabile, queste due rette si dicono *tangenti coniugate* alla superficie data nel punto considerato.

La posizione reciproca delle tangenti coniugate in un punto di una superficie data non dipende che da questa superficie.

Le tangenti coniugate sono reciproche; cioè se la generatrice di una prima superficie sviluppabile è tangente alla linea di contatto di una seconda superficie sviluppabile, la generatrice di questa è tangente alla linea di contatto della prima.

2.

Sul piano tangente in un punto della superficie data si può sempre descrivere una linea di secondo ordine avente il centro in quel punto, e della quale ciascun sistema di diametri coniugati coincide con un sistema di tangenti coniugate.

Questa linea dicesi *indicatrice*.

3.

I due assi dell'indicatrice, o le tangenti coniugate ortogonali sono tangenti alle linee di curvatura della superficie.

Per un medesimo punto della superficie data il raggio di curvatura di ciascuna sezione normale è proporzionale al quadrato del diametro dell'indicatrice situato nel piano di questa sezione; epperò, secondochè l'indicatrice è un'ellisse od un'iperbole, la somma o la differenza dei raggi di curvatura delle sezioni normali, che corrispondono a due tangenti coniugate, è costante ed uguale alla somma od alla differenza dei due raggi principali.

PROPOSIZIONI DI GEOMETRIA ANALITICA

1.

I punti di flesso di una curva algebrica di ordine n sono situati sopra una seconda curva algebrica di ordine $3(n-2)$. Quindi una curva algebrica di ordine n ha generalmente $3n(n-2)$ punti di flesso reali od immaginari.

I punti di flesso di una curva di terzo ordine sono perciò sopra una seconda curva di terzo ordine, e sono in numero di nove.

2.

La retta, che unisce due punti di flesso di una curva di terzo ordine, incontra la curva in un terzo punto di flesso.

Esistono dodici rette, che passano ciascuna per tre punti di flesso di una linea di terzo ordine; esse formano quattro sistemi di tre rette ciascuno, ed i nove punti di flesso sono tre a tre sulle tre rette di ciascun sistema.

Dei nove punti di flesso di una curva di terzo ordine sempre tre sono reali e sei immaginari.

3.

Se per un punto di una linea di terzo ordine si conducono tre rette, che incontrino di nuovo la curva, ciascuna in due punti, i sei punti d'intersezione così ottenuti sono sopra una conica, se il punto dato è un punto di flesso; e reciprocamente se i sei punti, in cui una linea di terzo ordine è intersecata da tre rette condotte per un altro punto della stessa curva, sono situati sopra una conica, quest'ultimo punto è un punto di flesso.

Se, condotte per un punto di una linea di terzo ordine delle secanti a questa curva, si prende sopra ciascuna secante la media armonica fra i suoi due segmenti, i punti di divisione così ottenuti sono in linea retta ogni qualvolta il punto dato è un punto di flesso; e reciprocamente, se il luogo dei punti armonici è una linea retta, il punto dato è un punto di flesso della linea di terzo ordine.

PROPOSIZIONI DI CALCOLO INFINITESIMALE

1.

Se si rappresenta con h una costante positiva qualunque, con $n\pi$ il massimo multiplo di π contenuto in h, e con $\varphi(y)$ una funzione di y, la quale, per $0<y<h$, sia finita e determinata, non sia discontinua che per un numero finito di valori di y, e non presenti un'infinità di massimi e di minimi; e se nell'integrale

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\, \alpha y}{\text{sen.}\, y} \varphi(y)\, dy$$

si fa crescere il parametro α oltre ogni limite, il valore dell'integrale converge verso il limite

$$\frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{c}\varphi(0)+\varphi(\pi-0)+\varphi(\pi+0)+\varphi(2\pi-0)+\varphi(2\pi+0) \\ +\ldots+\varphi(n\pi-0)\end{array}\right],$$

se $h = n\pi$, e verso il limite

$$\frac{\pi}{2}\left[\varphi(0)+\varphi(\pi-0)+\varphi(\pi+0)+\ldots+\varphi(n\pi-0)+\varphi(n\pi+0)\right]$$

se $h > n\pi$; ove $\varphi(i\pi \pm 0)$ rappresenta il limite, verso cui converge $\varphi(i\pi \pm \varepsilon)$ mentre ε converge verso zero.

La proposizione è vera anche quando per uno o più valori di y, in numero finito, compresi tra 0 ed h e differenti da zero o da un multiplo di π, la funzione $\varphi(y)$ diventi infinita; purchè, detto h_1 uno qualunque di questi valori di y, gli integrali

$$\int_y^{h_1} \varphi(y)\,dy \;, \qquad \int_{h_1}^{y} \varphi(y)\,dy \;,$$

abbiano, rispettivamente per $h_1 > y > 0$ e per $h > y > h_1$, valori finiti e determinati, che convergano verso zero mentre y converge verso h_1.

Se nelle vicinanze dei valori $\pi, 2\pi, \ldots, n\pi$ di y la funzione $\varphi(y)$ è continua, si ha più semplicemente:

$$\lim. \int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\varphi(y)\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(\pi) + \ldots + \frac{1}{2}\varphi(n\pi)\right]$$

se $h = n\pi$, e

$$\lim. \int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\varphi(y)\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(\pi) + \ldots + \varphi(n\pi)\right]$$

se $h > n\pi$.

2.

Purchè la funzione φ soddisfaccia alle condizioni precedenti, si ha per $-\pi < x < +\pi$:

$$\frac{1}{2}\Big[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\Big]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(y)\,dy+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(y)\cos.n(y-x)\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(y)\cos.n(y-x)\,dy\ .$$

Se tra $-\pi$ e $+\pi$ la funzione $\varphi(x)$ è continua, il primo membro di quest'uguaglianza può scriversi semplicemente $\varphi(x)$.

In tutti i casi si deve porre al primo membro

$$\frac{1}{2}\Big[\varphi(\pi)+\varphi(-\pi)\Big]$$

per $x=\pm\pi$.

3.

Ammesse le stesse condizioni, si ha per $0 \gtreqless x \gtreqless \infty$:

$$\frac{1}{2}\Big[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\Big]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos.\beta x\,d\beta\int_{0}^{\infty}\varphi(y)\cos.\beta y\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos.\beta x\,d\beta\int_{0}^{\infty}\varphi(y)\cos.\beta y\,dy\ ;$$

per $0 < x < \infty$:

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \text{sen.}\,\beta x\,d\beta \int_0^\infty \varphi(y)\,\text{sen.}\,\beta y\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen.}\,\beta x\,d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\text{sen.}\,\beta y\,dy\ ;$$

e per tutti i valori di x tra $-\infty$ e $+\infty$:

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\cos.\beta(y-x)\,d\beta\,dy\,.$$

Per i valori di x, per cui φ è continua, il primo membro si riduce a $\varphi(x)$.

La proposizione si può estendere ad una funzione di un numero qualunque di variabili indipendenti.

PROPOSIZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

1.

Dato un sistema di punti materiali soggetti a vincoli qualunque indipendenti dal tempo ed in uno stato di equilibrio stabile sotto l'azione di forze funzioni delle sole coordinate, si allontanino di quantità infinitamente piccole questi punti dalle loro posizioni d'equilibrio, ed impressevi velocità infinitamente piccole, si abbandonino all'azione delle forze date. Gli incrementi delle coordinate dei punti saranno costantemente infinitesimi, e se, avuto riguardo alle condizioni del sistema, le coordinate si possono esprimere in funzione di n variabili $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, le equazioni del movimento sono pure n e si possono mettere sotto la forma:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = m\alpha + m_1\beta + m_2\gamma + \ldots,$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = p\alpha + p_1\beta + p_2\gamma + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Di qui il seguente teorema:

Se $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ sono i valori delle variabili indipendenti alla fine del tempo t, quando all'origine del moto si ha

$$\alpha=\alpha_1, \quad \beta=\beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha}{dt}=u_1, \quad \frac{d\beta}{dt}=v_1, \quad \ldots;$$

se sono $\alpha'', \beta'', \ldots$ i valori delle variabili dopo il tempo t, quando per $t=0$ si ha

$$\alpha=\alpha_2, \quad \beta=\beta_2, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha}{dt}=u_2, \quad \frac{d\beta}{dt}=v_2, \quad \ldots,$$

e così di seguito per quanti si vogliano stati iniziali diversi; si ha alla fine del tempo t

$$\alpha=\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\ldots,$$
$$\beta=\beta'+\beta''+\beta'''+\ldots,$$

purchè per $t=0$ sia

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots, \quad \frac{d\alpha}{dt}=u_1+u_2+\ldots,$$
$$\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots, \quad \frac{d\beta}{dt}=v_1+v_2+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.

Se nel sistema si introducono nuove forze capaci di far subire ai loro punti d'applicazione spostamenti infinitamente piccoli, il movimento, che prenderà il sistema, risulterà dalla sovrapposizione di due altri: l'uno corrispondente allo stato iniziale proposto, senza introduzione di nuove forze; l'altro corrispondente all'introduzione di queste forze senza spostamenti nè velocità iniziali.

3.

Le soluzioni generali delle equazioni differenziali precedenti sono:

$$\alpha = A \ \operatorname{sen.}(kt+s) + A' \ \operatorname{sen.}(k't+s') + \ldots,$$
$$\beta = AB_1 \operatorname{sen.}(kt+s) + A'B_1' \operatorname{sen.}(k't+s') + \ldots,$$
$$\gamma = AB_2 \operatorname{sen.}(kt+s) + A'B_2' \operatorname{sen.}(h't+s') + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ove $A, A', \ldots, s, s', \ldots$ sono costanti arbitrarie da determinarsi secondo lo stato iniziale, e $B_1, B_1', \ldots, B_2, B_2', \ldots, k, k', \ldots$ sono costanti che dipendono dalla natura del sistema.

Perciò qualunque movimento di un sistema di punti in numero finito, i quali sieno stati spostati infinitamente poco da una posizione di equilibrio stabile, può essere considerato come risultante dalla sovrapposizione di tutte o di alcune delle diverse oscillazioni semplici, di cui il sistema è capace. Queste oscillazioni semplici possibili sono tante, quante sono le variabili α, β, $\ldots$, che permette la natura del sistema; quelle di un medesimo gruppo hanno lo stesso periodo, e le loro direzioni diverse e la durata del periodo dipendono unicamente dalla natura del sistema; le loro ampiezze e le loro fasi dipendono invece dalle condizioni iniziali.

Se i valori di $k, k', \ldots$ sono tra loro commensurabili, detto μ il loro massimo comun divisore, il sistema ritornerà alla posizione primitiva ad ogni intervallo di tempo θ dato da

$$\theta = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Se $k, k', \ldots$ sono incommensurabili, è impossibile che il sistema prenda in due istanti diversi la medesima posizione.

PROPOSIZIONI DI FISICA SPERIMENTALE

1.

Due gas, separati da un diaframma poroso, si mescolano attraversando il diaframma in quantità diverse.

Se invece di gas semplici si hanno mescolanze di gas differenti, ciascuno di questi attraversa il diaframma nella proporzione che gli è propria.

2.

Se il diaframma non è costituito od impregnato di materie aventi per alcuno dei gas adoperati un potere assorbente speciale, il volume di ciascun gas trasmesso in un dato tempo è ad un dipresso inversamente proporzionale alla radice quadrata della sua densità.

La natura del diaframma può però modificare ed anche invertire questa legge.

3.

Questi fenomeni porgono un mezzo per avvertire, anche a distanza, la presenza di gas diversi dall'aria in un dato ambiente, e per separare gas di densità differenti uniti in mescolanza.